SUJET

EXERCICE 1

On considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[\,, \quad f(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - x.$$

On considère aussi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ puis dresser le tableau des variations de g sur $]0,+\infty[$.

3. Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$. On la note α.

4. Justifier que :
$$\alpha \in [1,e] \quad \text{et} \quad f(\alpha) = \alpha.$$

5. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ et préciser la monotonie de la fonction f.

6. Démontrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n \leqslant e.$$

7. Vérifier que :
$$\forall x \in [1,e]\,, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$$
En déduire, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

8. Démontrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{e-1}{2^n}.$$

9. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

EXERCICE 2

Cet exercice est composé de deux parties.

La partie **I** consiste à calculer en fonction de n les termes d'une suite récurrente $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

La partie **II** étudie l'obtention du premier double PILE lors de lancers d'une pièce déséquilibrée.

Les résultats de la partie **I** peuvent être utilisés librement dans la partie **II.**

PARTIE I : Etude d'une suite.

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{4}{9}, \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1, \quad u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n.$$

On considère également les quatre matrices carrées d'ordre 2 définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } D = QAP$$

ainsi que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, les matrices colonnes :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_n = QX_n.$$

1. Vérifier que les deux matrices PQ et D sont diagonales (*Les calculs devront être inscrits sur la copie*).

2. En déduire que P est inversible et expliciter P^{-1}.

3. Soit $n \geqslant 1$. Donner, en la justifiant, la relation liant X_{n+1}, A et X_n. Prouver que $PY_n = X_n$. En déduire que :
$$Y_{n+1} = DY_n.$$

4. Prouver que :
$$\forall n \geqslant 1, \quad Y_n = D^{n-1}Y_1.$$

5. Calculer Y_1 et expliciter les coefficients de la matrice colonne Y_n.

6. En déduire que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right].$$

PARTIE II : Probabilités discrètes.

On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir PILE vaut $\dfrac{2}{3}$.

On suppose donné un espace probabilisé muni d'une probabilité P modélisant cette expérience.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dit qu'il y a apparition d'un double PILE au rang n si on obtient PILE au $(n-1)$-ième lancer et PILE au n-ième lancer.

On note :

- pour tout entier $n \geqslant 1$, F_n l'événement « on obtient FACE au n-ième lancer » ;
- pour tout entier $n \geqslant 2$, D_n l'événement « on obtient un double PILE au rang n **pour la première fois** » ;
- pour tout entier $n \geqslant 2$, $v_n = P(D_n)$. On conviendra que $v_1 = 0$.

Par exemple, si les lancers donnent successivement :

« PILE, FACE, FACE, FACE, PILE, FACE, PILE, PILE »

alors l'événement D_8 est réalisé.

1. On lance n fois de suite la pièce de monnaie. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus au cours de ces n lancers.

   (a) Déterminer la loi de X (*une réponse argumentée est attendue*). Préciser l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par la variable X ainsi que la valeur de $P(X = k)$ lorsque $k \in X(\Omega)$.

   (b) Donner la valeur de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.

2. On lance indéfiniment la pièce. On note Y le rang d'apparition du premier PILE, s'il apparait.

(a) Déterminer la loi de Y (*une réponse argumentée est attendue*). Préciser l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par la variable Y ainsi que la valeur de $P(Y = k)$ lorsque $k \in Y(\Omega)$.

(b) Donner la valeur de l'espérance $E(Y)$ et de la variance $V(Y)$ de la variable aléatoire Y.

3. Calculer v_2 et v_3. Vérifier que :

$$v_3 = \frac{1}{3}v_2 + \frac{2}{9}v_1.$$

Rappelons que l'on a convenu que $v_1 = 0$.

4. Soit $n \geqslant 2$. On suppose qu'au premier lancer, PILE est obtenu et on souhaite la réalisation de l'événement D_{n+2}.

   Quel est alors le résultat du second lancer ? A l'issue de ces deux premiers lancers, combien de lancers reste-t-il à effectuer pour que D_{n+2} puisse se réaliser ? *Les réponses devront être justifiées.*

   En déduire que :

$$P_{\overline{F_1}}(D_{n+2}) = \frac{1}{3}v_n.$$

5. Pour $n \geqslant 2$, justifier que :

$$P_{F_1}(D_{n+2}) = v_{n+1}.$$

6. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad v_{n+2} = \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{2}{9}v_n.$$

En outre, d'après la question **II.3,** *cette formule est vraie pour* $n = 1$.

7. A l'aide de la partie **I**, justifier que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad P(D_n) = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right].$$

8. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note E_n l'événement « il n'y a pas eu deux PILE consécutifs au cours des n premiers lancers ».

   Exprimer l'événement $\overline{E_n}$ en fonction des événements $D_2, .., D_n$. En déduire que :

$$P(E_n) = 1 - \sum_{k=2}^{n} v_k.$$

9. Calculer la limite de $P(E_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

EXERCICE 3

On considère les fonctions f, g et h définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2}{1+e^x}, \qquad g(x) = -2\ln\left(1+e^{-x}\right)$$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

1. Soit $x \geqslant 0$. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ puis vérifier que :

$$h(x) = -f'(x) \quad \text{et} \quad f(x) = g'(x).$$

2. Soit $A \geqslant 0$. Justifier que :

$$\int_0^A h(x)\,dx = 1 - f(A).$$

Que vaut $\displaystyle\int_0^A f(x)\,dx$?

3. Soit $A \geqslant 0$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^A x.h(x)\,dx = -Af(A) + g(A) - g(0).$$

4. La fonction h est-elle continue en 0 ? *Une réponse argumentée est attendue.*
5. Prouver que h est une densité de probabilité.

Dans toute la suite de l'exercice, on désigne par Z une variable aléatoire dont h est une densité.

6. Démontrer que la fonction de répartition H de Z est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \text{si } x \geqslant 0, & H(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \\ \text{si } x < 0, & H(x) = 0. \end{cases}$$

7. Calculer les probabilités suivantes :

$$P\left(Z \geqslant \ln(2)\right), \quad P\left(\ln(2) \leqslant Z \leqslant \ln(8)\right) \quad \text{et} \quad P_{(Z \geqslant \ln(2))}\left(Z \leqslant \ln(8)\right).$$

On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles.

8. Déterminer la médiane de Z c'est-à-dire la valeur de x pour laquelle

$$H(x) = \frac{1}{2}.$$

9. Etablir que Z possède une espérance et donner la valeur de $E(Z)$.