CONCOURS ECRICOME PREPA
APRÈS CLASSE PRÉPARATOIRE

SUJET

Exercice 1

Partie I : Calcul matriciel

On considère les trois matrices : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = QMQ$.

1. Calculer $Q \times Q$. En déduire que Q est inversible et expliciter Q^{-1}.
2. Calculer D (on vérifiera que D est une matrice diagonale).
   Justifier que $M = QDQ$.
3. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = QD^nQ$.
4. Expliciter les neuf coefficients de la matrice M^n.

Partie II : Etude d'une expérience

On dispose de 2 pièces de monnaie équilibrées, c'est-à-dire que la probabilité d'avoir Pile en lançant l'une de ces pièces vaut $\frac{1}{2}$.
On effectue des lancers successifs selon le protocole suivant :
- à l'étape 1, on lance les 2 pièces,
- à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 1 (s'il en existe),
- à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 2 (s'il en existe),

et ainsi de suite. On suppose que les lancers successifs éventuels d'une même pièce sont indépendants et que les deux pièces sont indépendantes l'une de l'autre.

On considère, pour tout entier naturel n non nul, les événements :
- A_n : « obtenir 0 Pile à l'étape n »,
- B_n : « obtenir 1 Pile à l'étape n »,
- C_n : « obtenir 2 Piles à l'étape n ».

et on note $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   Calculer les trois probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$ et $P_{C_n}(A_{n+1})$.
   Un argumentaire est attendu pour expliquer les valeurs de chacune de ces probabilités.
3. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n, \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n, \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}c_n. \end{cases}$$

4. (a) Vérifier que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix},$$

   où la matrice M a été définie dans la partie I.

(b) Démontrer, par récurrence, que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

5. (a) En déduire que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad P(A_n) = 1 + \frac{1}{4^n} - \frac{2}{2^n}, \quad P(B_n) = \frac{2}{2^n} - \frac{2}{4^n}, \quad P(C_n) = \frac{1}{4^n}.$$

(b) Vérifier que la somme de ces trois probabilités est égale à 1 et donner la limite de chacune d'elles.

Exercice 2

On rappelle que $e = e^1 \simeq 2{,}7$.
On considère la fonction f définie sur $D =]0,1[\cup]1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in D, \quad f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 3 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{\ln(u_n)}.$$

1. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$.
2. Pour $x \in D$, Calculer $f'(x)$ puis justifier que $f'(x)$ est du même signe que $\ln(x) - 1$.
3. (a) Dresser le tableau de variations de f sur D en le complétant par les limites de f aux bornes de D.
   (b) Montrer que f réalise une bijection de $[e,+\infty[$ sur $[e,+\infty[$.
4. (a) Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue x, pour $x \in D$.
   (b) Donner le signe de $f(x) - x$ lorsque $x \in D$.
5. (a) Prouver par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant e.$$

   (b) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.
6. (a) Montrer que :

$$\forall x \in [e,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2.$$

   (b) En déduire que :

$$\forall x \in [e,+\infty[, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

7. (a) Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - e| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - e|.$$

   (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - e| \leqslant \frac{1}{4^n}.$$

   (c) Retrouver ainsi la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3

Une société possède un serveur vocal qui reçoit des appels (que l'on supposera consécutifs) soit pour le produit A, soit pour le produit B. On suppose que les sujets des appels (produit A ou produit B) sont indépendants d'un appareil à l'autre.

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Partie I : Etude de 100 appels

On suppose dans cette partie que le serveur vocal reçoit 100 appels. On suppose que 5 % des appels reçus par le serveur concernent le produit A et 95 % des appels concernent le produit B. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'appels concernant le produit A au cours des 100 appels reçus.

1. (a) Donner la loi de X. On précisera $X(\Omega)$ ainsi que $P(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$.
   Une réponse argumentée est attendue.

   (b) Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

2. On suppose que chaque appel concernant le produit A permet à la société d'engranger un bénéfice net de 95 euros et chaque appel concernant le produit B permet à la société d'engranger un bénéfice net de 5 euros. On note Y le bénéfice total de la société pour 100 appels.

   Justifier que $Y = 90X + 500$. En déduire l'espérance et la variance de Y.

3. On suppose que l'on peut approcher la loi de la variable X par la loi d'une variable aléatoire Z suivant une loi de Poisson de même espérance que X.

   Déterminer la valeur du paramètre de cette loi de Poisson.
   À l'aide de la table de valeurs ci-dessous, calculer une valeur approchée de $P(X \geqslant 10)$.

FONCTION DE REPARTITION DE LA LOI DE POISSON DE PARAMETRE λ

Par exemple, si U suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$ alors $P(U \leqslant 4) =0{,}815$.

	λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	0	0,368	0,135	0,05	0,018	0,007	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
	1	0,736	0,406	0,199	0,092	0,040	0,017	0,007	0,003	0,001	0,000
	2	0,920	0,677	0,423	0,238	0,125	0,062	0,030	0,014	0,006	0,003
	3	0,981	0,857	0,647	0,433	0,265	0,151	0,082	0,042	0,021	0,010
	4	0,996	0,947	0,815	0,629	0,440	0,285	0,173	0,100	0,055	0,030
	5	0,999	0,983	0,916	0,785	0,616	0,446	0,301	0,191	0,116	0,067
	6	1	0,995	0,966	0,889	0,762	0,606	0,450	0,313	0,207	0,130
	7	1	0,999	0,988	0,949	0,867	0,744	0,599	0,453	0,324	0,220
	8	1	1	0,996	0,979	0,932	0,847	0,729	0,593	0,456	0,333
	9	1	1	0,999	0,992	0,968	0,916	0,830	0,717	0,587	0,458
	10	1	1	1	0,997	0,986	0,957	0,901	0,816	0,706	0,583

Partie II : Etude de la première série d'appels

On suppose dans cette partie que le serveur vocal reçoit une infinité d'appels consécutifs. On suppose également que 20 % des appels concernent le produit A et 80 % des appels concernent le produit B. On dit que le serveur possède une **première série d'appels de longueur** n si les n premiers appels concernent le même produit et le $(n + 1)$-ième appel concerne l'autre produit. On note :

- X_A la variable aléatoire égale au nombre d'appels nécessaires pour obtenir le premier appel concernant le produit A ;
- X_B la variable aléatoire égale au nombre d'appels nécessaires pour obtenir le premier appel concernant le produit B ;
- L la variable aléatoire égale à la longueur de la première série d'appels.

Par exemple, si les 3 premiers appels concernent le produit A, les 2 appels suivants le produit B, les 4 appels suivants le produit A, ... on symbolisera ces appels sous la forme $AAABBAAAA\ldots$. Dans ce cas, on a $X_A = 1$, $X_B = 4$ et $L = 3$.

1. (a) Donner la loi de X_A. On précisera $X_A(\Omega)$ ainsi que $P(X_A = k)$ pour $k \in X_A(\Omega)$.
   Une réponse argumentée est attendue.
   Donner l'espérance $E(X_A)$ et la variance $V(X_A)$ de X_A. En déduire l'espérance de X_A^2, notée $E(X_A^2)$.
   (b) De même, donner la loi de X_B, ainsi que son espérance $E(X_B)$ et sa variance $V(X_B)$. En déduire l'espérance de X_B^2, notée $E(X_B^2)$.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
   (a) Décrire l'événement $(L = n) \cap (X_B = n+1)$ à l'aide d'une succession de lettres A et B.
   Décrire l'événement $(L = n) \cap (X_A = n+1)$ à l'aide d'une succession de lettres A et B.
   (b) En déduire l'expression de $P(L = n)$ en fonction de n et vérifier que :
$$\forall n \geqslant 1, \qquad P(L = n) = 0,8 \times P(X_A = n) + 0,2 \times P(X_B = n).$$
3. A l'aide de la question précédente, montrer que les espérances de L et de L^2 sont données par :
$$\begin{aligned} E(L) &= 0,8 \times E(X_A) + 0,2 \times E(X_B), \\ E(L^2) &= 0,8 \times E(X_A^2) + 0,2 \times E(X_B^2). \end{aligned}$$
   En déduire la valeur de l'espérance $E(L)$ et de la variance $V(L)$ de la variable aléatoire L.

Partie III : Etude de la durée d'appel

Dans cette partie, on suppose que lors d'un appel au serveur vocal, la durée de celui-ci en minutes est une variable aléatoire D qui suit une loi exponentielle de paramètre 1. On considère les deux premiers appels, dont on supposera les durées indépendantes. On note D_1 la durée (en minutes) du premier appel et D_2 la durée (en minutes) du second appel. On note M la durée maximale des deux premiers appels, c'est-à-dire $M = \max(D_1, D_2)$.

1. Donner une densité f de D ainsi que sa fonction de répartition F.
2. Soit b un réel positif. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^b t\left(e^{-t} - e^{-2t}\right) dt$.
3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\left(e^{-t} - e^{-2t}\right) dt$ converge et vaut $\dfrac{3}{4}$.
4. Soit x un réel positif. Exprimer l'événement $(M \leqslant x)$ en fonction des événements $(D_1 \leqslant x)$ et $(D_2 \leqslant x)$.
5. En déduire l'expression de $P(M \leqslant x)$ en fonction de $F(x)$ lorsque $x \geqslant 0$.
   Vérifier que ce résultat reste valable si $x < 0$.
6. On admet que M est une variable aléatoire à densité. Vérifier qu'une densité g de M est donnée par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 2e^{-x}(1 - e^{-x}) & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
7. Établir que M admet une espérance et donner sa valeur.