BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 339

Conception : ESSEC

Filière Littéraire

Programme ENS B/L

Mardi 5 mai 2015, de 8 h. à 12 h.

OPTIONS :

- *MATHEMATIQUES*
- *SCIENCES SOCIALES*

Tournez la page S.V.P.

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concours d'admission de 2015

Conception : ESSEC

OPTION Lettres et Sciences Humaines

MATHÉMATIQUES option ENS B/L

Mardi 5 mai 2015, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

Dans tout ce problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 et on note $[\![1,n]\!]$ l'ensemble des entiers k vérifiant $1 \leq k \leq n$.
On désigne par A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels égale à sa transposée : ${}^tA = A$.
Le coefficient de A situé sur la ligne i ($i \in [\![1,n]\!]$) et la colonne j ($j \in [\![1,n]\!]$) sera noté $a_{i,j}$.
On note E_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes à coefficients réels.
Toute matrice réelle d'ordre 1 sera confondue avec le réel la constituant.

On fixe un vecteur non nul $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ de E_n. Pour x vecteur de E_n, on pose :

- $q_A(x) = {}^t xAx$. Ainsi, si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a : $q_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j$.
- $c(x) = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \cdots + \omega_n x_n - 1 = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i - 1 = {}^t\omega x - 1 = {}^t x\omega - 1$.

On désigne par C l'ensemble $C = \{x \in E_n;\ c(x) = 0\}$.
On suppose que pour tout vecteur x non nul de E_n, $q_A(x) > 0$.
On se propose d'étudier l'existence du minimum de q_A sur l'ensemble C.
La partie II est indépendante de la partie I si on admet les résultats qui y sont montrés.

Partie I - Existence du minimum

1) En résolvant l'équation $Ax = 0$ pour x inconnue de E_n, montrer que la matrice A est inversible.

2) Montrer que $A^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

3) Montrer que pour tout vecteur x non nul de E_n, on a ${}^t xA^{-1}x > 0$.

4) Montrer que pour tout vecteur x de E_n, il existe un réel λ unique et un vecteur h de E_n unique tels que $x = \lambda A^{-1}\omega + h$ et ${}^t\omega h = 0$.

5) Montrer alors que si x vérifie $c(x) = 0$, on a $q_A(x) = \dfrac{1}{{}^t\omega A^{-1}\omega} + {}^t hAh$.

6) En déduire que q_A admet un minimum sur C atteint uniquement en x_0 vérifiant $Ax_0 = \lambda_0\omega$ avec $\lambda_0 = \dfrac{1}{{}^t\omega A^{-1}\omega}$.

Dans la suite de cette partie, n vaut 3 et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$; enfin, $\omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

7) Pour $x = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ dans E_3, montrer que $q_A(x) = (u+v-w)^2 + (v+3w)^2 + w^2$ et justifier que $q_A(x) > 0$ si $x \neq 0$.

8) Résoudre le système d'inconnue (u, v, w, λ) dans $\mathbb{R}^4$: $\begin{cases} u+v-w &= \lambda \\ u+2v+2w &= 2\lambda \\ -u+2v+11w &= 3\lambda \\ u+2v+3w &= 1 \end{cases}$

9) En déduire le minimum de q_A sur C et le vecteur x_0 atteignant ce minimum.

10) Retrouver ce résultat en étudiant les extrema de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\varphi(v, w) = q_A(x) \text{ où } x = \begin{pmatrix} 1-2v-3w \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Partie II - La matrice de Hilbert

Jusqu'à la fin de ce problème, n est de nouveau quelconque et pour i et j dans $[\![1,n]\!]$, on prend $a_{i,j} = \dfrac{1}{i+j-1}$. On choisit $\omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc, pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a :

$$c(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i - 1 \text{ et } q_A(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{x_i x_j}{i+j-1}$$

11) Vérifier que ${}^tA = A$.

12) Montrer que pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans E_n, on a $q_A(x) = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1}\right)^2 dt$.

13) Justifier que pour x dans E_n non nul, $q_A(x) > 0$.

D'après la première partie, il existe un vecteur unique $x_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ dans C minimisant q_A et il existe λ_0 réel unique tel que $Ax_0 = \lambda_0 \omega$.

On note P_n la fonction polynomiale réelle définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad P_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^0 t^{k-1}$.

14) Justifier que pour $1 \leq i \leq n$, la i-ème coordonnée du vecteur Ax_0 est $\displaystyle\int_0^1 t^{i-1} P_n(t)\,dt$ et que cette coordonnée ne dépend pas de i.

15) Montrer que pour toute fonction polynomiale réelle Q de degré inférieur ou égal à $n-1$, on a :

$$\int_0^1 Q(t) P_n(t)\,dt = \lambda_0 Q(1)$$

16) En déduire que P_n est l'unique fonction polynomiale réelle de degré inférieur à $n-1$ vérifiant :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 (t-1)^i P_n(t)\,dt = 0 \quad (1 \leq i \leq n-1) \\ P_n(1) = 1 \end{cases}$$

17) Déterminer P_2.

18) Soit Q_n la fonction polynomiale réelle définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad Q_n(t) = \displaystyle\int_0^t P_n(u)\,du$ et R_n la fonction polynomiale réelle définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad R_n(t) = (t-1)P_n(t)$.

Montrer que pour tout entier i de $[\![0, n-2]\!]$, $\displaystyle\int_0^1 (t-1)^i Q_n(t)\,dt = \int_0^1 (t-1)^i R_n(t)\,dt = 0$.

19) Justifier que l'ensemble F des fonctions polynomiales réelles P de degré inférieur à n et vérifiant $\int_0^1 (t-1)^i P(t)\,dt = 0$ pour $0 \leq i \leq n-2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que (Q_n, R_n) en forme une famille libre.

20) Montrer qu'hormis la fonction nulle, il n'y a pas dans F de fonction polynomiale de degré inférieur à $n-2$.

21) Montrer que la dimension de F est 2.

22) En déduire que pour tout entier n avec $n \geq 2$, il existe des réels α, β et γ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P_{n+1}(t) = \alpha P_n(t) + \beta Q_n(t) + \gamma R_n(t)$$

23) Déterminer P_3 par deux méthodes.

PROBLÈME 2

On désigne par $\mathscr{E} = (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Les variables aléatoires réelles utilisées dans ce problème sont toutes définies sur $\mathscr{E}$.
On notera $\mathscr{P}$ l'ensemble des variables aléatoires réelles positives et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.
On rappelle que si X est dans $\mathscr{P}$ et si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, l'espérance de X est :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$$

Si A est une partie de Ω, on désigne par $\mathbb{1}_A$ la fonction caractéristique de A définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

Les trois parties de ce problème sont indépendantes si on admet les résultats montrés dans la première partie.

Partie I - Caractérisation de l'espérance d'une variable aléatoire

I.A - Croissance de l'espérance sur $\mathscr{P}$

Dans cette section, on désigne par X et X' deux variables aléatoires appartenant à $\mathscr{P}$ avec $X \leq X'$.
On note $X(\Omega) \cup X'(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

24) Montrer que pour $1 \leq i \leq n$, $\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=i}^{n} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (X' = x_j))$.

25) En déduire que $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(X')$.

I.B - Un passage à la limite

Dans cette section, on se donne une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires de $\mathscr{P}$. On suppose cette suite croissante, c'est-à-dire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_n \leq X_{n+1}$.

26) Justifier que pour tout ω de Ω, la limite de la suite $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Justifier aussi l'existence de la limite de la suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Soit X une variable aléatoire de $\mathscr{P}$ avec pour tout ω de Ω, $X(\omega) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} X_n(\omega)$.
Pour t réel avec $0 \leq t < 1$ et n dans $\mathbb{N}$, soit $E_n(t)$ l'événement : $E_n(t) = \{\omega \in \Omega;\ X_n(\omega) \geq tX(\omega)\}$.

27) Justifier que la suite $(E_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (au sens de l'inclusion) et de réunion Ω.

28) Montrer que la variable aléatoire X_n' avec $X_n'(\omega) = t\mathbb{1}_{E_n(t)}(\omega)\cdot X(\omega)$ vérifie : $\mathbb{E}(X_n') \leq \mathbb{E}(X_n)$.

29) En déduire que $t\mathbb{E}(X) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$ puis que $\mathbb{E}(X) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

I.C - Limite d'une suite d'espérances

30) Soit X une variable aléatoire quelconque (discrète ou non) positive.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de variables aléatoires de $\mathscr{P}$ qui converge vers X, c'est-à-dire telle que : $\forall\omega\in\Omega,\quad \lim\limits_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$ ne dépend pas du choix de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les hypothèses précédentes.

31) Dans cette question, on désigne par X une variable aléatoire discrète prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et admettant une espérance. Pour k dans $\mathbb{N}$, on pose $A_k = \{\omega\in\Omega;\ X(\omega) = k\}$.
Enfin, on pose $X_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k\cdot\mathbb{1}_{A_k}$.
Déterminer $X_n(\Omega)$ et justifier que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de variables aléatoires de $\mathscr{P}$ qui converge vers X. Quelle est la limite de la suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$?

Dans la suite du problème, on admettra le résultat suivant généralisant ce qui vient d'être montré :

> Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de variables aléatoires quelconques convergeant vers une variable aléatoire X. Alors la suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbb{E}(X)$.

Partie II - Parties positive et négative d'une variable aléatoire

Si f est une fonction réelle de la variable réelle, on pose, pour t réel :

$$f^+(t) = \max(f(t),0) \text{ et } f^-(t) = \max(-f(t),0)$$

32) Exprimer, pour t réel, $f(t)$ et $|f(t)|$ à l'aide de $f^+(t)$ et de $f^-(t)$.

33) En déduire que f^+ et f^- sont continues sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est continue sur $\mathbb{R}$.

Partie III - Démonstration de la formule de Stirling

On se propose de montrer la formule de Stirling : $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n}$.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires.
On dit que X_n converge en loi vers une variable aléatoire X, si pour tout fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et bornée, la suite $(\mathbb{E}(f(X_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbb{E}(f(X))$.
On rappelle enfin le théorème de la limite centrée :

> Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et suivant une même loi d'espérance finie $\mathbb{E}$ et admettant une variance finie $\mathbb{V}$.
> Alors $\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n-n\mathbb{E}}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une loi normale $\mathscr{N}(0,\mathbb{V})$.

34) Soient X et Y deux variables indépendantes, suivant une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Déterminer la loi suivie par $X+Y$.
On admettra plus généralement que la loi suivie par une somme de n variables indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre 1, suit elle-même une loi de Poisson de paramètre n.
Jusqu'à la fin de ce problème, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre 1.
On pose $Z_n = \dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n-n}{\sqrt{n}}$ et $Z_n^- = \left(\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n-n}{\sqrt{n}}\right)^-$ la partie négative de Z_n (notations de la partie précédente).

35) Montrer que $\mathbb{E}(Z_n^-) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k)}{\sqrt{n}} e^{-n} \frac{n^k}{k!}$ puis que $\mathbb{E}(Z_n^-) = \dfrac{\sqrt{n}\cdot n^n \cdot e^{-n}}{n!}$.

36) Montrer que Z_n^- converge en loi vers la partie négative Z^- d'une variable aléatoire Z suivant une loi normale centrée réduite.

37) Calculer $\mathbb{E}(Z^-)$ et en déduire la formule de Stirling.

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : ESSEC

Filière Littéraire

Programme ENS B/L

SCIENCES SOCIALES

Mardi 5 mai 2015, de 8 h. à 12 h.

L'entreprise, institution citoyenne ?

N.B. : *Il n'est fait usage d'aucun document et l'utilisation de tout matériel électronique n'est pas autorisée.*

IMPRIMERIE NATIONALE – 15 1223 – D'après documents fournis