BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 284

Conception : HEC Paris - ESSEC BS

MATHÉMATIQUES

Programme ENS B/L

Jeudi 30 avril 2020, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE 1

Toutes les variables aléatoires introduites dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(G)$ et $\mathbb{V}(G)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire G définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\ln 2)(1+t)} & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

   Dans la suite de l'exercice, on note X une variable aléatoire de densité f.

2. (a) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1-\ln 2}{\ln 2}$.

   (b) En utilisant l'identité, valable pour tout z réel, $z^2 = z(1+z) - z$, calculer $\mathbb{V}(X)$.

3. Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

   (a) Déterminer pour tout x réel, $F(x)$.

   (b) Montrer que l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$, d'inconnue x, admet une unique solution x_0 que l'on déterminera.

   (c) Tracer la courbe représentative de F dans le plan rapporté à un repère orthonormé (on donne $\ln 2 \approx 0.7$).

4. Soit $x \in [0,2]$.

   (a) Établir l'équivalence suivante : $f(t)f(x-t) \neq 0 \Longleftrightarrow \max(0, x-1) \leqslant t \leqslant \min(1,x)$.

   (b) On note φ_x la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+t)(1+x-t)} & \text{si } \max(0,x-1) \leqslant t \leqslant \min(1,x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

   On admet l'existence d'un unique couple (A,B) de réels indépendants de t pour lesquels on a :

$$\forall t \in \big[\max(0,x-1), \min(1,x)\big], \quad \frac{1}{(1+t)(1+x-t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1+x-t}.$$

   Montrer que $A = B = \dfrac{1}{x+2}$.

5. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X, de même loi que X et de densité f.

   On pose $Z = X + Y$, et on admet que Z est une variable aléatoire à densité.

   On note h une densité de la variable aléatoire Z et on admet que h est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t \cdot$$

   (a) Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$.

   (b) Montrer que :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2\ln(1+x)}{(\ln 2)^2(x+2)} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{2(\ln 2 - \ln x)}{(\ln 2)^2(x+2)} & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels *tous non nuls* et on associe à cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$$

- Si la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite finie p *non nulle*, on dit que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est *bien convergente*.
- Si la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, on dit que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est *convergente*.
- Si la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est ni *convergente* ni *bien convergente*, on dit qu'elle est *divergente*.

1. Dans chacun des cas suivants, exprimer p_n en fonction de n et en déduire la nature (convergente, bien convergente ou divergente) de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

   (c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

2. On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2,\ u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}\ .$$

   (a) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante : $p_{2n} = 1 + \dfrac{1}{2n}$.

   (b) Déterminer les limites respectives des suites $(p_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(p_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   On admet alors que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est *bien convergente*.

3. Soit a un réel donné tel que $0 < a < 1$. On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + a^{2^n}\ .$$

   On prendra garde au fait que a^{2^n} désigne la valeur de $a^{(2^n)}$ qui est distinct de $(a^2)^n = a^{2n}$.

   (a) Établir la relation suivante :

$$\forall n \geqslant 1,\ (1-a^2)p_n = 1 - a^{2^{n+1}}\ .$$

   (b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on $a^{2^n} \leqslant a^n$.

   (c) En déduire la valeur de $p = \lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ en fonction de a.

4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 1 + a_n\ .$$

   Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $T_n = \dfrac{a_n}{p_n}$.

   (a) Exprimer, pour tout entier $n \geqslant 2$, T_n en fonction de p_n et p_{n-1}.

(b) On suppose que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est *bien convergente* de limite $p > 0$.

Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} T_n = 1 - \frac{1}{p}$.

(c) On suppose que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est *divergente*.

Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} T_n = 1$.

PROBLÈME

Dans ce problème, on désigne par n et p des entiers naturels tels que $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 2$.
Toutes les matrices considérées ici sont à coefficients réels.
Soit A une matrice carrée $p \times p$.
Pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, on note $a_{i,j}$ le coefficient situé à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne de la matrice A.
On rappelle que la trace de A, notée $\operatorname{tr}(A)$, est définie par : $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,i}$.
Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont des réels, on note $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ la matrice $p \times p$ diagonale :

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

Dans la première partie, on exprime la trace de la puissance n^{e} d'une matrice diagonalisable, en fonction des valeurs propres de cette matrice.
Dans la seconde partie, on étudie les colorations d'une figure.

Partie I - Expression de la trace de A^n si A est diagonalisable

A - Étude d'un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que les valeurs propres de A sont -1 et 2.

2. (a) Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ constitue une base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2 et que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ constituent une base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre -1.

   (b) En déduire que la matrice A est diagonalisable. On pose alors $D = \operatorname{diag}(-1,-1,2)$.

3. On note P la matrice 3×3 définie par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On admet que $P^3-2P^2+3P-3I=0$, où I est la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ (on ne demande pas de vérifier cette relation).

(a) Calculer la matrice P^{-1}, inverse de la matrice P.

(b) Justifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.

(c) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

(d) Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $\mathrm{tr}(A^n) = \mathrm{tr}(D^n) = 2(-1)^n + 2^n$.

B - Cas général

Dans cette section, A désigne une matrice $p \times p$ supposée diagonalisable.

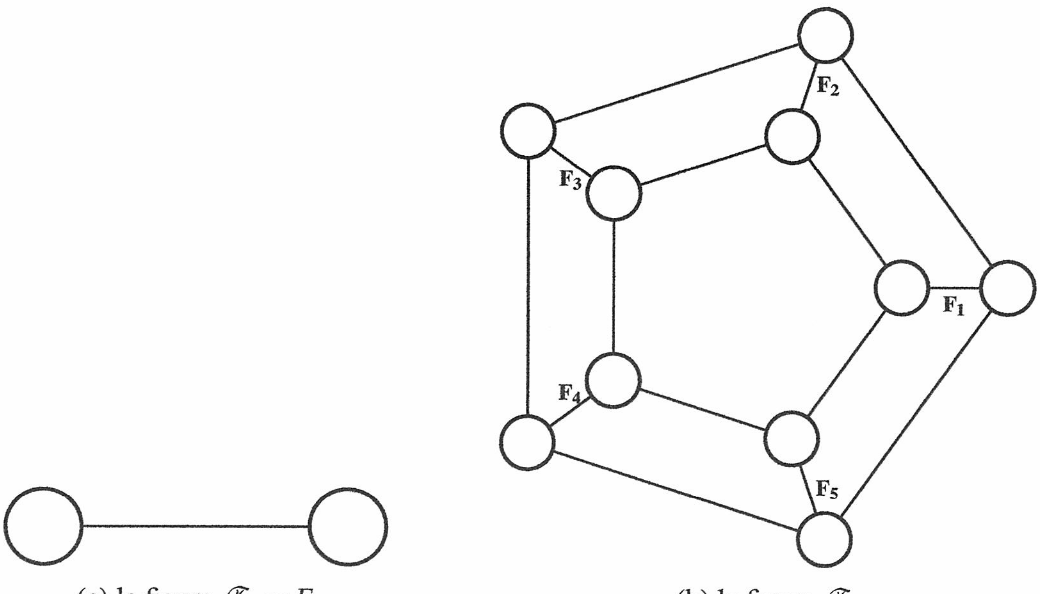
4. *Question préliminaire :*
Montrer que si U et V sont deux matrices $p \times p$, alors $\mathrm{tr}(UV) = \mathrm{tr}(VU)$.
On rappelle que A est diagonalisable et donc qu'il existe une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ avec $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_p$ et une matrice $p \times p$ inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

5. Justifier que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{tr}(A^n) = \mathrm{tr}(D^n) = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \cdots + \lambda_p^n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n \cdot$$

Partie II - Une figure colorée

Dans la suite de ce problème, on étudie les colorations d'une figure notée $\mathscr{F}_n$ pour $n \geqslant 1$.
La figure $\mathscr{F}_1$ ou plus simplement F est constituée de deux points ou sommets reliés entre eux.
Plus généralement, la figure $\mathscr{F}_n$ est constituée de n copies de la figure F notées $F_1, F_2, \ldots, F_n$ reliées entre elles et disposées de sorte qu'elles forment deux polygones à n sommets.
On notera abusivement $\mathscr{F}_n = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$.
La FIGURE 1 ci-dessous représente les figures F et $\mathscr{F}_5 = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$.



(a) la figure $\mathscr{F}_1 = F$ (b) la figure $\mathscr{F}_5$

FIGURE 1: deux figures $\mathscr{F}_n$ ($n=1$ et $n=5$)

On dispose par ailleurs de trois couleurs, à savoir : Blanc notée B, Gris notée G et Noir notée N.
Chaque sommet de $\mathscr{F}_n$ est coloré par une couleur choisie parmi $\{B,G,N\}$.
La coloration de la figure $\mathscr{F}_n$ sera dite **correcte** si deux sommets reliés dans la figure sont de couleurs différentes.
La FIGURE 2 ci-dessus représente une coloration correcte de $\mathscr{F}_4 = (F_1,F_2,F_3,F_4)$.

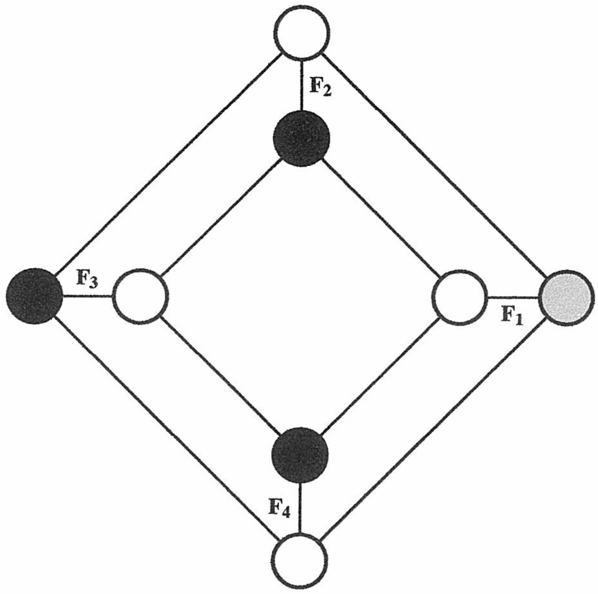


FIGURE 2: une coloration correcte de $\mathscr{F}_4$

Par exemple, les colorations correctes de F sont :

$$(B,G),\ (B,N),\ (G,N),\ (G,B),\ (N,B) \text{ et } (N,G)\cdot$$

On notera que les colorations (B,G) et (G,B) (par exemple) sont différentes ; ceci signifie que dans une coloration de la figure $\mathscr{F}_n$, les sommets sont supposés distingués les uns des autres.

Dans la suite de ce problème, on se donne une partie non vide $C = \{c_1,c_2,\dots,c_p\}$ avec $2 \leqslant p \leqslant 6$, de l'ensemble $\{(B,G),(B,N),(G,N),(G,B),(N,B),(N,G)\}$, des colorations correctes de F.

Pour obtenir une coloration correcte de la figure $\mathscr{F}_n = (F_1,F_2,\dots,F_n)$, on commence par choisir des colorations correctes de chacune des copies F_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ dans l'ensemble C.
On dit que deux éléments $c = (K_1,K_2)$ et $c' = (K_1',K_2')$ de C sont **compatibles** si $K_1 \neq K_1'$ et $K_2 \neq K_2'$.

Par exemple, $c = (B,N)$ et $c' = (N,G)$ sont compatibles car $B \neq N$ et $N \neq G$; par contre, $c = (B,N)$ et $c' = (B,G)$ ne sont pas compatibles (même première composante B).

Il en résulte que la coloration de la figure $\mathscr{F}_n = (F_1,F_2,\dots,F_n)$ sera correcte si et seulement si, les colorations F_1 et F_2, F_2 et F_3, ... , F_{n-1} et F_n et aussi F_n et F_1 sont compatibles.

A - Probabilités

Dans cette section, on suppose $n \geqslant 2$ et on admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ tel que Ω est l'ensemble des figures $\mathscr{F}_n$ colorées (correctement ou non), avec $\mathscr{F}_n = (F_1,F_2,\dots,F_n)$, et $\mathbb{P}$ est telle que $F_1,F_2,\dots,F_n$ sont colorées par un élément de C avec équiprobabilité et indépendance.

6. Pour une coloration c_i de F_1 avec $1 \leqslant i \leqslant p$, l'entier i désigne l'**indice** de cette coloration.
   Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X donnant l'indice de la coloration de F_1 pour la figure $\mathscr{F}_n = (F_1, F_2, \dots, F_n)$?
   Quelles sont l'espérance et la variance de X ?
7. Montrer que la variable aléatoire Y donnant le nombre de F_i avec $1 \leqslant i \leqslant n$ de la figure $\mathscr{F}_n = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ ayant pour coloration l'élément c_1 de C suit une loi usuelle que l'on déterminera.
   Quelles sont l'espérance et la variance de Y ?

B - Matrice de compatibilité et nombre de colorations correctes

On introduit la matrice $p \times p$ de compatibilité associée à C, notée A_C ou tout simplement A, dont les coefficients sont tels que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } c_i \text{ et } c_j \text{ sont compatibles} \\ 0 & \text{si } c_i \text{ et } c_j \text{ ne sont pas compatibles} \end{cases}$$

Exemple : dans le cas de la FIGURE 2 ci-dessus, on a donc $n = 4$ et on prend $p = 3$ avec :
$c_1 = (B,G)$ (coloration de F_1), $c_2 = (N,B)$ (colorations de F_2 et F_4) et $c_3 = (B,N)$ (coloration de F_3) et donc $C = \{(B,G),(N,B),(B,N)\}$.

Il en résulte que $A_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(par exemple, (B,G) et (B,G) ne sont pas compatibles donc $a_{1,1} = 0$ et (N,B) et (B,N) sont compatibles donc $a_{2,3} = 1$).

Dans la suite de cette section, on notera $u_n(C)$ le nombre de colorations correctes de la figure $\mathscr{F}_n$ utilisant les colorations de C.
Le but de la fin de cette section est de déterminer une expression de $u_n(C)$ pour $n \geqslant 2$ utilisant la matrice A_C.

8. Un exemple.
   Dans cet exemple, $c_1 = (B,G)$, $c_2 = (G,N)$, $c_3 = (B,N)$; ainsi, $C = \{(B,G),(G,N),(B,N)\}$.
   (a) Montrer que $A_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) Déterminer A_C^2 et en déduire A_C^n pour $n \geqslant 2$ (on distinguera suivant la parité de n).
   (c) Déterminer $u_2(C)$ en représentant les figures $\mathscr{F}_2$ correctement colorées correspondantes et déterminer aussi $u_3(C)$.
   (d) Vérifier que $u_2(C) = \mathrm{tr}(A_C^2)$ et que $u_3(C) = \mathrm{tr}(A_C^3)$.
9. Cas général.
   On revient au cas général et on se donne :
   - une figure $\mathscr{F}_n = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ avec $n \geqslant 2$;
   - un ensemble $C = \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$ de colorations correctes de F ;
   - la matrice de compatibilité $A = A_C$ associée à C.

(a) Soient $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_n}$ des colorations choisies dans C.
Montrer qu'en affectant la coloration c_{i_j} à F_j pour $j \in [\![1,n]\!]$, on obtient une bonne coloration de $\mathscr{F}_n$ si et seulement si :

$$a_{i_1,i_2} \times a_{i_2,i_3} \times \cdots \times a_{i_{n-1},i_n} \times a_{i_n,i_1} = 1$$

(b) En déduire que $u_n(C) = \mathrm{tr}(A_C^n)$.

(c) Soit $n \geqslant 2$. Quelle est la probabilité pour qu'une figure $\mathscr{F}_n = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ choisie au hasard et telle que les colorations de chaque F_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) soient prises dans $C = \{(B,G),(G,N),(N,B)\}$, ait une coloration correcte ?

(d) Même question, les colorations de chaque F_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) étant prises cette fois dans l'ensemble $\{(B,G),(G,B),(B,N),(N,B)\}$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 20 1071 – D'après documents fournis