

RAPPORT DE CORRECTION
DE MATHÉMATIQUES programme ENS B/L
Conception ESSEC BS/HEC Paris
Concours 2020

SOMMAIRE

Remarques sur le sujet	2
Remarques générales	2
Conseils aux futurs candidats	5

Remarques sur le sujet

Le sujet était constitué de deux exercices et d'un problème indépendant, traitant de thèmes distincts du programme de première et de deuxième année et comportant chacun des questions abordables d'application directe du cours. Les candidats ont su repérer les exercices ou parties qu'ils savaient le mieux traiter pour les aborder en priorité ce qui est une bonne stratégie. La plupart des résultats utiles à la poursuite de l'exercice ou du problème étant donnés, les candidats ont pu admettre un résultat pour poursuivre. Dès lors qu'ils le spécifient clairement, cela ne pose aucun problème et c'est même une démarche conseillée. A l'inverse, les parties les plus difficiles et les moins abordées ont été ;

- Exercice 1: question 5(b).
- Exercice 2: question 4(b) et 4(c)
- Problème: question 9.

Remarques générales

Sur la forme, on peut saluer un effort dans la présentation et la rédaction des copies. Les copies sont lisibles, généralement rédigées avec soin, dans un français correct, sans abréviation. Les résultats sont presque toujours encadrés, comme demandé par la consigne. Les candidats ont donc "joué le jeu" et on peut se réjouir de leur bonne volonté et de leur application.

Sur le fond, on note une bien plus grande hétérogénéité.

- Sur 302 copies, on dénombre une seule copie blanche.
- Les copies avec les notes les plus faibles sont celles qui montrent de graves lacunes de cours : caractérisation d'une densité de probabilité inconnue, confusion entre variables aléatoires discrètes et à densité, incapacité à donner un critère de diagonalisation. Certaines méthodes fondamentales : recherche de valeurs propres, recherche d'une base d'un sous-espace vectoriel, détermination de la fonction de répartition à partir d'une densité... semblent même inconnues. Ces candidats ont sans doute "décroché" du cours de mathématiques.
- Heureusement, la majorité des candidats a su repérer les questions faciles, accessibles, proches du cours. Ces questions ont permis de valoriser tout élève maîtrisant son cours et ayant fourni au cours de ses années de préparation, un travail d'apprentissage régulier et sérieux. Outre ces connaissances fondamentales, sont aussi valorisées la rigueur de la rédaction et l'honnêteté du raisonnement. On préférera en effet un raisonnement partiel mais juste, qu'un raisonnement qui conclut à l'aide d'arguments erronés et abusifs.
Certains candidats admettent ne pas savoir terminer la question mais exposent une méthode juste et cohérente: c'est une bonne démarche intellectuellement parlant et la partie de la question qu'ils ont honnêtement traitée et/ou l'exposition de la méthode leur rapportent une partie des points attribués à la question.
- On trouve également de bonnes, voire très bonnes copies montrant une excellente compréhension des outils et des thèmes du programme. Ces copies ont réussi à aborder les questions les plus délicates et les plus abstraites de la fin du problème.

- On peut enfin signaler un écueil, notamment concernant les copies de bons candidats. Certains ont tellement détaillé leur rédaction et leurs calculs qu'ils ont perdu du temps et n'ont sans doute pas pu aller aussi loin qu'ils auraient voulu. Certains candidats (présentant de réelles qualités) consacrent trois voire quatre pages aux deux premières questions. La concision et l'attitude d'économie consistant à ne donner que les arguments strictement nécessaires, doivent être recherchées afin d'améliorer la gestion du temps.

Exercice 1.

Cet exercice de probabilité a été abordé par l'immense majorité des candidats notamment dans les premières questions, applications directes du cours. Parmi les erreurs les plus graves, une confusion systématique dans une poignée de copies entre variables aléatoires discrètes et à densité. Le cours doit être mieux appris pour être restitué correctement. Même sans terminer les calculs, toute formule et définition correcte rapporte des points.

Question 1: oubli assez fréquent de la positivité ou bien étude de critères inutiles comme les limites, la dérivabilité, le caractère C^1 de f . Le simple fait d'énoncer les trois critères à vérifier, sans nécessairement parvenir à les vérifier, était déjà une initiative valorisée.

Question 2(a) : l'intégrale à étudier est le plus souvent correctement donnée, exception faite des candidats qui écrivent une somme.... La recherche d'une primitive, ou plus généralement le calcul effectif de l'intégrale, a posé davantage de problèmes.

Comme le résultat était donné, les candidats ont pu l'admettre et passer.

Question 2(b): certains candidats confondent variance et moment d'ordre 2.

Les candidats doivent s'étonner de trouver une variance négative.

Concernant le résultat, on n'attendait pas nécessairement la forme la plus simplifiée possible.

Question 3(a): des incohérences dans plusieurs copies. Des candidats trouvent notamment une fonction de répartition discontinue, négative ou décroissante. Cela révèle d'assez graves lacunes de cours et un manque d'esprit critique.

Question 3(b): une partie des copies a utilisé le théorème des valeurs intermédiaires ou de la bijection, pour prouver l'existence et éventuellement l'unicité. Dans ce cas, attention à l'oubli de la continuité. Attention à ne pas oublier l'étude en dehors du segment $[0, 1]$. Pour le calcul effectif de x_0 , on déplore des erreurs dans les règles de calcul des fonctions $\ln$ et $\exp$: c'est dommage et pénalisant.

Question 3(c): le tracé de la courbe a souvent été évité. On voit trop souvent des courbes affines par morceaux.

Question 4(a): certains candidats compliquent beaucoup car ils ne semblent pas avoir compris ce qui était demandé. Dans ce cas, peut-être vaudrait-il mieux passer que d'écrire des pages de calculs (étude d'une équation polynomiale du second degré ?!) qui sont sans rapport avec la question posée.

Question 4(b): il fallait bien lire et rappeler dans sa copie que l'énoncé faisait admettre l'existence et l'unicité du couple (A, B) . Dès lors, une simple vérification suffisait...

Question 5(a): les candidats pensent trop peu à utiliser la linéarité de l'espérance. On lit que X et Y suivent la même loi, donc $X = Y$, d'où

$$V(X + Y) = V(X + X) = 4V(X).$$

Question 5(b): question plus difficile, peu abordée, et seulement par les meilleures copies.

Exercice 2.

Cet exercice sur le produit télescopique a été le moins réussi de l'ensemble du sujet. Il ne faisait pas appel à des connaissances très sophistiquées mais on a rencontré de fréquentes erreurs dès les premières questions du fait que les candidats affirment que la limite du produit est le produit des limites ou encore ne voit pas que l'indice k varie à l'intérieur du produit.

Question 1 (a): comme mentionné ci-dessus, on lit trop souvent que la limite du produit est le produit des limites ou encore que $p_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Certains ont utilisé, à bon escient, la fonction $\ln$ pour transformer le produit en somme.

Question 1 (b): mêmes erreurs que ci-dessus.

Question 1 (c): mêmes erreurs que ci-dessus.

Question 2 (a): la plupart des candidats raisonnent par récurrence, mais certains utilisent des arguments abusifs au niveau de l'hérédité.

Question 2 (b): tous les candidats ayant abordé cette question ont su déterminer la limite de (p_{2n}) . Peu ont su étudier avec rigueur la limite de (p_{2n+1}) . La plupart n'ont pas vu qu'un simple "de même" ne suffisait pas.

Question 3 (a): attention aux calculs sur les puissances. L'énoncé faisait pourtant une mise en garde à ce sujet.

Question 3 (b): attention aux arguments abusifs, non justifiés voire erronés pour arriver coûte que coûte à la formule demandée. On préférera un raisonnement partiel mais juste qu'un raisonnement qui conclut en "trichant".

Question 3 (c): on lit des limites étonnantes qui dépendent encore de n .

Question 4 (a): question assez bien réussie par les candidats l'ayant abordée.

Question 4 (b): attention à ne pas manipuler des sommes infinies qui pourraient diverger.

Question 4 (c): l'énoncé ne dit pas vers quelle limite tend (p_n) . L'énoncé dit juste que la suite est divergente.

Problème.

La majorité des copies a abordé la partie I-A du problème et su mettre en œuvre les méthodes du cours d'algèbre linéaire. À défaut de terminer les calculs, la mise en œuvre d'une méthode de cours correcte était valorisée et rapportait des points. Attention cependant à ne pas déborder du cadre du programme officiel.

Question A 1: certains candidats effectuent des opérations du pivot de Gauss directement sur la matrice A . On a pu lire de très nombreuses fois dans les copies que 2 était valeur propre car c'était la somme de chacune des lignes. Cet argument, présenté sans plus d'explications, est un peu court et ne fait pas partie du programme officiel. Idem pour l'argument reliant la somme des valeurs propres et la trace. Et que dire des calculs de déterminant de matrice de taille 3 ? Nous rappelons aux candidats qu'il faut rester dans le cadre du programme.

Question A 2(a): certains candidats se contentent de vérifier que les vecteurs donnés sont vecteurs propres et concluent après cette seule vérification.

Question A 2(b): une question simple d'application du cours, souvent très mal réussie ! Les arguments donnés sont fantaisistes: on compte le nombre de valeurs propres de la matrice et on en trouve 3, on dit que la matrice a 3 vecteurs propres, on dit que la matrice est de dimension 3, on dit que la matrice est de rang 3, on dit que 0 n'est pas valeur propre... Constat: le cours est mal appris et les élèves font de nombreuses confusions. Il s'agit parfois des mêmes étudiants qui utilisent deux questions avant des méthodes hors programme de recherche de valeurs propres... Le conseil est donc de se recentrer sur le cours et sur le programme.

Question A 3(a): de trop nombreux candidats n'ont pas vu la relation polynomiale vérifiée par P et donnée par l'énoncé : quel dommage ! D'autres recherchent l'inverse de P en écrivant une matrice Q possédant 9 coefficients inconnues et en résolvant $PQ = I$, ce qui est un peu "lourd". Certains ont la bonne idée de vérifier que l'inverse trouvé vérifie bien $PP^{-1} = I$: c'est une initiative bienvenue. On devrait enfin s'étonner de trouver des matrices P^{-1} clairement non inversibles, par exemple la matrice nulle !

Question A 3(b): des candidats vérifient par le calcul que $A = PDP^{-1}$ alors que les arguments du cours de diagonalisation donnent directement l'égalité.

Question A 3(c): savoir calculer correctement D^n rapportait déjà des points.

Question A 3(d): la réponse étant donnée, certains candidats peu scrupuleux tentent de la trouver à tout prix. Il vaut mieux reconnaître que l'on a fait une erreur de calcul. De plus, on n'est pas encore censés pouvoir utiliser la formule de la question 5 démontrée un peu plus loin (sauf à la démontrer dès cette question ci).

Question B 4: une question abstraite et technique, sans doute vue en cours et souvent assez bien réussie... sauf par les candidats qui évoquent la linéarité de la trace.

Question B 5: il ne suffisait pas de dire que "deux matrices semblables ont la même trace", propriété qui ne figure d'ailleurs pas au programme officiel.

Question A 6 et 7: les candidats n'ont pas été découragés par la mise en situation un peu abstraite. On a pu lire beaucoup de bonnes réponses, au détail près que p est désormais un entier quelconque.

Question B 8(a) : la réponse étant donnée, il faut fournir suffisamment d'arguments pour convaincre.

Question B 8 (b): des erreurs étonnantes dans les calculs de puissances de matrices.

Question B 8 (c): les candidats ont pu s'aider de la question suivante pour deviner le nombre de colorations correctes. C'est une bonne stratégie que de relier les questions entre elles, utiliser celles qui précèdent et jeter un œil à celles qui suivent pour guider l'intuition.

Question B 8(d): pas de difficulté majeure.

Question B 9: questions peu abordées, sauf dans les excellentes copies.

Conseils aux futurs candidats

- Mener un travail assidu et régulier en mathématiques ciblé sur le cours: s'assurer une parfaite connaissance des définitions et savoir mettre en oeuvre les principaux théorèmes. On peut être un peu déçu par la mauvaise maîtrise du cours de diagonalisation.
- S'entraîner à mener des calculs (calcul d'intégrales, recherche de primitives, manipulation de puissance, travail sur les fonctions usuelles...)
- Lire dès le début tout le sujet, repérer les parties que l'on sait traiter et gérer au mieux son temps.
- Soigner la qualité de la rédaction et de l'argumentation, sans pour autant détailler à l'excès.
- Privilégier la rigueur et la précision et éviter la paraphrase un peu vague ou pire les arguments abusifs.
- Acquérir une distance critique vis à vis de ses résultats: variance négative, fonction de répartition discontinue...