RAPPORT D'ÉPREUVE

Remarques globales

Avec une moyenne de 11,50 et un écart-type de 5,44, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Forme

Les copies sont souvent bien présentées, les résultats sont souvent mis en valeurs. Les candidats qui à l'inverse ne font pas cet effort ne peuvent pas être évalués de manière indulgente. Certaines copies, heureusement rares, ressemblent à de véritables brouillons.

Lorsque l'énoncé fournit la réponse à une question calculatoire, il convient de détailler les calculs. Le correcteur n'attribuera pas de points à des arguments du type « par le calcul on obtient [...] » ou « de même que précédemment ».

Il convient de répondre explicitement aux questions posées.

Les calculs en « zig-zag » sont extrêmement pénibles à suivre pour le correcteur, et cela doit l'être aussi pour le candidat. Une telle présentation n'incite pas le correcteur à étudier en détail le calcul, pour attribuer quelques points en cas d'erreur. Le nombre de copies n'est pas limité : nous incitons les candidats à aérer et aligner leurs calculs, ainsi qu'à les disposer correctement.

Fond

Les candidats doivent simplifier leurs réponses aux questions de calcul, ce n'est pas au correcteur de reprendre la réponse pour en vérifier la correction ! Il est indispensable de conclure une question.
Ce sujet a mis en lumière les grandes difficultés que rencontrent bon nombre de candidats lors des manipulations d'inégalités. Les techniques de base (relevant souvent du lycée, voire du collège) sont loin d'être acquises, et beaucoup de candidats semblent ne pas avoir les idées claires sur le type de réponses à apporter aux problèmes qui mettent en jeu ces techniques. Par exemple, pour majorer un terme de la forme $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, la plupart des candidats essaient de majorer $(x^2+y^2)\ldots$

On relève de grandes confusions entre appartenance et inclusion. Il faut prendre du recul sur les réponses apportées : on ne peut pas décemment proposer une probabilité ou une fonction de répartition prenant des valeurs négatives.

Remarques question par question

Exercice 1

Partie 1 : Étude de trois matrices

1. La première partie de cette question est en général bien réalisée.
   Cependant la déduction des valeurs propres entraine des confusion de vocabulaire : ainsi il est souvent écrit que « $X^3+3X=0$ est un polynôme annulateur de la matrice A ». Trop de candidats ne maîtrisent

pas le lien entre polynôme annulateur et valeur propre, concluant directement après avoir trouvé 0 pour unique racine que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$. La factorisation du polynôme annulateur $X^3 + 3X$ est parfois assez hasardeuse et donne les résultats suivants : $X^2(X+3)$ ou $X(X^2-3)$. Certains ne recherchent pas les valeurs propres à partir de l'équation obtenue comme imposé dans le sujet et surtout pensent que les valeurs propres d'une matrice sont ses éléments diagonaux, ou bien qu'une matrice ayant des zéros sur sa diagonale ne peut être diagonalisée ou n'est pas inversible.

Pour la non-diagonalisation de A, certains utilisent l'argument incorrect : « A n'est pas symétrique », montrant ainsi une confusion dans le sens des implications. D'autres encore affirment que A est antisymétrique donc non-diagonalisable. Certains candidats comparent la somme des dimensions des sous-espaces propres à la dimension de l'ensemble des matrices carrées $\mathscr{M}_3(R)$, ou confondent dimension et taille de A. Il n'est *a priori* pas du tout évident que « *A admet au moins une valeur propre réelle* ».

2. De (trop) nombreux candidats se lancent dans l'étude des éléments propres (avec généralement des erreurs) de J et S alors qu'il suffisait de remarquer que ces matrices sont symétriques réelles, donc diagonalisables. Une telle démarche indique une mauvaise lecture et un manque d'analyse de l'ensemble de l'exercice. Il est conseillé aux candidats de ne pas se lancer tête baissée et sans réflexion dans des calculs longs et hasardeux, les sujets privilégient les raisonnements à des calculs fastidieux. Des candidats remarquent que S est symétrique, mais ne voient pas que J l'est également. L'argument que S et J sont à coefficients réels est très souvent oublié.

   Il a également été constaté une certaine confusion entre J et I_3. Une lecture attentive de l'énoncé devrait éviter ce type de confusion.

3. Le raisonnement suivant (gravement erroné) : « si $JX \neq 0$, comme $J \neq 0$ on a $X = 0$ » est trop souvent rencontré.

   L'énoncé est parfois mal interprété et beaucoup de candidats comprennent le résultat de cette question comme « J et S ont mêmes vecteurs propres ».

   Ceux qui ont adopté une méthode calculatoire, en cherchant les sous-espaces propres de S puis en testant sur J chacun des vecteurs trouvés, ont perdu un temps précieux et peu sont arrivés au bout de ces calculs. Et dans ce cas, beaucoup ne l'ont vérifié que pour 3 vecteurs propres et non pour tous les vecteurs propres de S.

   Toutefois, plusieurs candidats montrent assez aisément qu'un vecteur propre X associé à une valeur propre non nulle de S vérifie $JX = 0$, donc que X est vecteur propre de J associé à 0, puis que $(1, 1, 1)$ est base de $\mathrm{Ker}(S)$ et est vecteur propre de J pour la valeur propre 3. Un dernière étape indiquant que tous les cas ont ici été traités est souvent manquante.

4. Cette question n'a pas été très souvent traitée de manière parfaitement correcte : on retrouve régulièrement l'affirmation fausse : « S et J ont les mêmes vecteurs propres ». De plus, écrire la relation de diagonalisation pour S avec une matrice de passage P puis pour J avec une matrice de passage Q et conclure que nécessairement $P = Q$ est une erreur de raisonnement couramment retrouvée. Des candidats ne comprennent pas le but de la question, à savoir diagonaliser dans une même base. Un certain nombre de candidats croient que mêmes vecteurs propres impliquent même valeurs propres. Certains candidats ont avancé que S et J étaient semblables, ce qui est faux.

Partie 2 : Étude des matrices magiques.

La plupart des candidats n'ont pas compris qu'il était possible d'utiliser s en remplacement de tous les ℓ_i, c_j, d_1 et d_2 ; à partir de la question 5. Cela occasionne alors des réponses souvent lourdes et peu lisibles.

5. Beaucoup de candidats montrent correctement la linéarité mais oublient d'écrire que ℓ_1 est une forme.
6. Peu de candidats pensent à interpréter $\mathcal{K}_n$ comme un noyau. Dans beaucoup de copies, l'inclusion $\mathcal{K}_n \subset \mathscr{E}_n$ est oubliée. La linéarité de s n'est que très rarement exploitée, bien qu'elle soit donnée par l'énoncé. Trop de candidats démontrent en pratique à nouveau cette linéarité et perdent du temps en vérifiant la nullité de la somme de toutes les lignes et toutes les colonnes et les diagonales. Il ne suffit pas d'affirmer que $\mathcal{K}_n$ est stable par combinaison linéaire, mais il fallait le prouver et de conclure clairement par l'appartenance de $M + \lambda N$ dans $\mathcal{K}_n$ et non seulement la somme nulle.
7. Des confusions conduisent à écrire que $\ell_i\left({}^{\mathrm{t}}M\right) = c_j(M)$ (et inversement), les indices i et j n'ayant pas de rapport entre eux. Les égalités des sommes des lignes/colonnes/diagonales sont parfois incomplètes (en particulier d_2 est oubliée.).
8. Certains candidats partent sur une « démonstration par l'absurde » en supposant qu'il existe λ, μ des réels vérifiant $M - \lambda J \in \mathcal{K}_n$ et $M - \mu J \in \mathcal{K}_n$. Ils réalisent rarement qu'ils démontrent alors uniquement l'unicité, et non l'existence. Peu de candidats pensent à préciser tout d'abord que $M - \lambda J_n$ est magique avant de s'intéresser à sa somme.
9. La non-nullité de W est trop souvent oubliée. On trouve aussi des réponses du type $MW = \ell_i(M)W$ qui sont éminemment maladroites, au mieux : la réponse ne dépend pas de i (rarement introduit).

Partie 3 : Étude du cas où $n = 3$

10. Cette question est en général bien traitée. Il est regrettable cependant que certains oublient de répondre à une partie de la question en ne précisant pas explicitement la valeur de la somme de chacune de ces matrices magiques. Quelques candidats n'ont pas compris que $s(M)$ est la valeur commune de $d_1(M)$, $d_2(M)$ et des $\ell_i(M)$, $c_j(M)$ (en cas d'égalité) et non la somme de ces valeurs.
11. Cette question classique et fort certainement traitée durant les deux années de CPGE est en général faite correctement. Cependant, il est peu acceptable qu'il reste une partie non négligeable de candidats qui ne savent pas la résoudre rapidement et soigneusement.
12. (a) Cette question a été très peu traitée ou justifiée trop succinctement. Un certain nombre de candidats se « perd » dans des équations vérifiées par $\ell_i(M_1)$, $\ell_i(M_2)$, $\ell_i(M)$, $\ell_i({}^{t}(M))$, $\cdots$ également avec les colonnes, au lieu d'utiliser directement la linéarité de la somme.

    (b) Cette question est très rarement correctement traitée, des arguments fantaisistes conduisent à conclure directement. Les raisonnements suivants ont souvent été rencontrés « M_1 et A sont antisymétriques donc colinéaires », ou « les deux matrices symétriques M_2 et S donc colinéaires ».
13. Certains candidats essaient d'utiliser un argument de dimension pour montrer que (A, J, S) est une base de l'espace des matrices magiques. Pourtant, la dimension de cet espace n'a été établie nulle part auparavant !

    Trop de candidats ne prouvent que la liberté de la famille et le font souvent de manière peu efficace en démontrant que la famille (A, S) est libre en revenant à la définition, alors qu'il s'agit d'une famille de deux vecteurs clairement non-colinéaires.
14. Une question très peu abordée par les candidats et alors mal rédigée par ceux ayant tenté d'y répondre.

Exercice 2

1. Cette question est en général bien traitée. Cependant une erreur fréquente sur les implications des régularités d'une fonction est rencontrée : « f est continue, donc dérivable, donc $\mathscr{C}^2$ ». Et certaines notations utilisées sont maladroites ou incorrectes : utiliser la notation ' pour dériver, écrire le symbole ∂ sous les formes suivantes : δ, σ, S. Une expression factorisée des dérivées partielles permettait de mener efficacement l'étude de la question suivante. Les candidats sont invités fortement à passer un peu de temps à mettre sous forme factorisée leurs résultats.
2. Cette question a souvent été bien réussie. Cependant des maladresses dans les calculs sont à signaler, l'obtention correcte des 4 points critiques étant relativement rare. Quelques candidats oublient que l'équation $y^2 = 1/2$ admet deux solutions. Certains candidats ne détaillent aucun calcul, et obtiennent étrangement les trois points étudiés dans les questions suivantes. Le correcteur interprète souvent cela comme un manque d'honnêteté intellectuelle, ce qui ne peut que nuire à l'évaluation de la suite de la copie.
3. Bien que la matrice soit diagonale, certains élèves se lancent dans le calcul de recherche des valeurs propres en résolvant $A - \lambda I$, en se trompant parfois même dans les calculs.

   Certains croient à tort que la présence de deux valeurs propres de signe différent ne permet pas de conclure.

   Certains oublient tout simplement de conclure quant à l'existence ou non d'un extremum : se contenter de dire que la fonction admet un point selle (ou col, à condition de ne pas l'écrire « colle »...) ne répond pas complètement à la question.

   Que $\mathbb{R}^2$ soit ouvert et $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ soit point critique sont rarement évoqués dans la conclusion, ici et dans les deux questions suivantes. Cet oubli est encore plus dommageable quand le point ne fait pas parti de la liste obtenue dans la question 2.
4. Cette question a souvent été bien réussie, mais peu traitée. La recherche de valeurs propres d'une matrice diagonale ne devrait toutefois pas nécessiter l'usage d'un déterminant.
5. Peu de candidats parviennent à obtenir les valeurs propres exactes de la matrice hessienne. Le facteur $\mathrm{e}^{-3/4}$ est notamment fréquemment oublié. Certains candidats pensent qu'une matrice à coefficients négatifs ne peut avoir qu'un spectre négatif. Or, ceci est faux, comme le montre le contre-exemple $A = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Certains candidats font appel au déterminant pour obtenir le signe du produit des valeurs propres, ce qui est hors programme. Quelques rares candidats utilisent les résultats hors programmes avec les notations de Monge pour conclure.
6. (a) Majorer correctement l'exponentielle semble hors de portée pour la plupart des candidats. Dans l'ensemble, lesD majorations sont souvent très confuses. L'inégalité triangulaire est peu utilisée, et l'absence de valeurs absolues est très fréquente.

   (b) Beaucoup de copies n'abordent pas cette question. La limite demandée a posé des problèmes, de manière surprenante. Beaucoup de candidats ne sont pas à l'aise avec les croissances comparées, et se sentent obligés de pousser de lourds développements. Très peu de candidats ne savent pas comment utiliser la valeur de la limite pour répondre à la deuxième partie de la question.

   (c) Cette question est peu abordée et les représentations graphiques de $\mathcal{K}$ données sont rarement correctes : un disque, une portion du carré demandé, souvent le quart.

(d) Cette question est rarement abordée. Les quelques candidats traitant cette question se perdent souvent, ne réalisant pas que c'est sur l'**image** des points critiques qu'il faut raisonner.

7. Bien qu'il semble clair que beaucoup de candidats aientnt déjà vu ce type de graphe, leurs interprétation portent souvent sur la taille des flèches, mais presque aucun ne pense à relier ce graphe à la propriété du cours en jeu ici et ne fait pas le lien avec les extrema liés. Beaucoup de justifications sont fantaisistes : « le point est à l'extrémité du cercle » ou « la taille du vecteur est très petite ».
8. Cette question simple sur le signe d'un trinôme ne sollicite que peu de notions du programme propre des CPGE. Il est regrettable qu'elle fut si peu traitée et de manière imparfaite. Une étude sans calcul de la dérivée était attendue. Certains candidats donnent la liste des extrema locaux, d'autres précisent les points en lesquels les extrema sont atteints mais ne donnent pas leur valeur numérique.
9. Cette question est très peu traitée. Le lien avec la question précédente et un commentaire de la figure ont été extrêmement rares.

Problème

Partie 1 : Estimateur du maximum de vraisemblance

1. (a) Ce type de question Scilab faisant partie du bagage minimum en informatique devrait être abordée par beaucoup plus de candidats.
   Les commandes `input` et `disp` n'ont rien à faire dans le corps d'une fonction scilab, dans ce contexte.
   Il est regrettable, alors que l'énoncé rappelait généreusement la méthode pour simuler une loi uniforme, que certains candidats ne parviennent pas a minima à choisir les bonnes valeurs ded paramètres (il reste trop fréquemment la variable `m` et/ou `b` dans la ligne de commande).
   La fonction `max` ne semble pas être toujours connue des candidats, on relève des boucles `FOR` pour trouver le maximum d'une liste.

   (b) Cette question n'est pas toujours abordée, ce qui laisse penser que certains candidats ont réalisé une impasse sur les statistiques. La plupart des réponses données sont toutefois satisfaisantes.

2. Les questions 2 et 3 sont souvent traitées efficacement et avec succès, ce qui montre que les candidats y ont été bien préparés. C'est un point de satisfaction !

   (a) Cette question de cours est en grande majorité bien traitée.

   (b) En général, cette question en général est bien traitée et bien justifiée.
   Cependant cette écriture $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \leqslant x\right)$ est trop souvent rencontrée : elle n'a pas de sens. Quelquefois, l'intersection porte sur des probabilités et non sur des événements.

   (c) On relève une certaine méconnaissance des critères du cours permettant de garantir qu'une fonction de répartition correspond à une variable à densité. Certains fournissent une liste, souvent trop longue, de propriétés parmi lesquelles ne figurent pas toujours les deux éléments indispensables.
   Rappelons en particulier que la croissance n'est pas à vérifier.
   Dans le calcul de la densité, beaucoup pensent que la dérivée de $x \longmapsto \left(\dfrac{x}{a}\right)^n$ est $x \longmapsto \left(\dfrac{x}{a}\right)^{n-1}$.

3. Une maladresse souvent commise : l'image de V_n n'est pas *finie*, mais *bornée*.
   Le calcul de l'espérance est effectuée avant ou pendant l'étude de la convergence absolue : il convient de mieux organiser ces deux raisonnements distincts. Certains candidats mènent leurs calculs sous réserve

de convergence et donnent la valeur numérique de l'espérance sans 'lever' à aucun moment la réserve.
Beaucoup de candidats ne répondent pas à la question posée (V_n est-il biaisé ?), mais indiquent que V_n est asymptotiquement sans biais. Si cette affirmation est en soi correcte (et pertinente), elle ne répond malheureusement pas à la question posée !

4. Un manque de maîtrise dans la gestion des valeurs absolues apparaît : la traduction de $|V_n - a| \geqslant \varepsilon$ devient $-\varepsilon \leqslant V_n - a \leqslant \varepsilon$ ou encore $\varepsilon \leqslant V_n - a \leqslant -\varepsilon$.
5. Une question peu abordée. La détermination correcte de $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{t}{an}\right)^n$ est bien réalisée par un bon nombre de candidats, mais posent encore des problème pour un certain nombre de candidats qui composent de manière illicite des équivalents.
6. Cette question est très arement abordée.
On a observé quelques tentatives intéressantes. Ces candidats-l) ont toutefois eu des difficultés à faire « disparaître » le paramètre a des bornes de l'intervalle. Le caractère asymétrique de la situation, qui pouvait être observé dans le graphe donné précédemment (on lisait que $V_n \leqslant a$) n'a pas bien été vu.
7. (a) Cette question simple est en général bien réalisée.
   (b) La définition du risque quadratique est mal connue !
   La réponse étant donnée, le correcteur est vigilant sur la réalité des calculs effectués : des tentatives d'entourloupe sont récurrentes (et toujours à proscrire !)

Partie 2 : Méthode des moments

8. Cette question d'informatique est peu traitée, mais quand elle est traitée, elle l'est correctement sauf certains qui oublient le coefficient 2 dans la définition de M_n.
9. Cette question est souvent et assez bien abordée par les candidats.
Invoquer l'indépendance des variables aléatoires X_k pour le calcul de $E\left(\overline{X}_n\right)$ est inutile ; seule la linéarité de l'espérance doit être invoquée.
La variance d'une loi uniforme n'est pas toujours bien connue, elle est parfois confondue avec celle d'une loi uniforme *discrète*.
10. Cette question est en général bien traitée par ceux qui l'ont abordée.
11. Cette question est rarement traitée.
Le théorème central limite est mal maîtrisé, tant du point de vue des hypothèses que dans sa formulation.
12. Cette question est très rarement abordée.
La notion d'intervalle de confiance n'inspire manifestement pas confiance.
13. Certains (rares) candidats fournissent des arguments corrects permettant de comparer les risques mais oublient de confronter leurs observations au graphique.

Partie 3 : Consistance de ces estimateurs

14. (a) Cette question est en général bien traitée par ceux qui l'ont abordée.
   Certains candidats pensent à tort que $\max(X_1, \ldots, X_n) = X_1$ car le support de X_1 « comprend » des valeurs plus grandes que celles des autres variables aléatoires X_i pour $i \geqslant 2$.
   (b) Cette question est en général bien traitée par ceux qui l'ont abordée.
   (c) Cette question relativement simple et abordable par toute personne qui lit bien l'énoncé, une bonne part de la réponse se trouvant dans une question précédente, est malheureusement trop peu souvent

abordée, et les erreurs y sont regrettables.

Trop de candidats donnent une réponse faisant intervenir la disjonction des cas $\frac{3}{2}a < 0$; $\frac{3}{2}a \in [0, a]$; $\frac{3}{2}a \in [a, 2a]$; $\frac{3}{2}a > 2a$. Cette discussion n'a pourtant pas lieu d'être !

Parmi ceux qui trouve la probabilité de $1/4$, la majorité « intuite » que l'estimateur ne converge pas sans réussir à le prouver rigoureusement.

15. (a) Cette question assez simple est très rarement traitée.

    Un bon nombre de bonnes réponses, mais aussi bien trop d'erreurs grossières.

    (b) Cette question est très rarement abordée.

    L'erreur très souvent rencontrée ici est un problème de factorisation: $\frac{n-1}{n}M'_n - a = \frac{n-1}{n}(M'_n - a)$.

    (c) Cette question est très très rarement abordée.

    (d) Cette question est très très rarement abordée.

16. Cette question est très rarement abordée.