
Sujet 0 Emlyon, Option mathématiques appliquées

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*La **présentation** de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées.*

Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.

Si un candidat croit voir une erreur dans le sujet, il l'indiquera clairement sur sa copie et continuera à composer.

Le sujet est composé de trois exercices.

Exercice 1

Deux systèmes différentiels

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Le but de cette question est de diagonaliser la matrice A .
 - a) Justifier que la matrice A est de rang 1.
 - b) En déduire une valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.
 - c) Justifier que 6 est valeur propre de A et qu'un vecteur propre associé est $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
 - d) Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
2. Résoudre le système différentiel :

$$(SH) \begin{cases} x' &= x + 2y - z \\ y' &= 2x + 4y - 2z \\ z' &= -x - 2y + z \end{cases} .$$

3. Soient $X_1 : t \mapsto X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$ et $X_2 : t \mapsto X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$ deux solutions du système

(SH).

On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ vérifiant $X_1(t_0) = X_2(t_0)$.

Que pouvez-vous dire de X_1 et X_2 ?

4. a) Déterminer la solution $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ du système (SH) vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- b) Déterminer la solution $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ du système (SH) vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Dans cette question on considère trois fonctions continues $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On s'intéresse au système différentiel :

$$(S) \begin{cases} x' &= x + 2y - z + a(t) \\ y' &= 2x + 4y - 2z + b(t) , \\ z' &= -x - 2y + z + c(t) \end{cases}$$

où x , y et z sont des fonctions de classe C^1 , inconnues, de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de la variable réelle t .

Une solution de (S) sur \mathbb{R} est une application $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ où x , y et z sont des fonctions de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que, pour tout t réel, on ait :

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + 2y(t) - z(t) + a(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + 4y(t) - 2z(t) + b(t) , \\ z'(t) &= -x(t) - 2y(t) + z(t) + c(t) \end{cases}$$

- a) Préciser quel vecteur colonne $B(t) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dépendant de la variable réelle t permet d'écrire le système (S) sous la forme :

$$(S) \quad X' = AX + B(t).$$

- b) Soit Y une solution particulière sur \mathbb{R} de (S). Démontrer que $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ est

solution de (S) sur \mathbb{R} si et seulement si $Z : t \mapsto X(t) - Y(t)$ est solution de (SH) sur \mathbb{R} , (SH) désignant le système de la question ??.

- c) Dans cette question, on pose pour $t \in \mathbb{R}$: $a(t) = 1$, $b(t) = 2(1 - e^t)$, $c(t) = e^t - 1$.

Démontrer que $Y : t \mapsto Y(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de (S) sur \mathbb{R} .

En déduire toutes les solutions du système différentiel (S) sur \mathbb{R} .

Exercice 2

Des variables aléatoires à densité

Dans tout l'exercice, λ désigne un réel strictement positif.

On considère la fonction $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} e^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. a) Justifier que la fonction f_λ est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* .
b) Démontrer que pour tout $x > 0$ on a : $f'_\lambda(x) = -\frac{1}{2x}(1 + \lambda\sqrt{x})f_\lambda(x)$.
c) Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\lambda(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\lambda(x)$.
Dresser le tableau de variation de f_λ sur \mathbb{R}_+^* .
d) Démontrer que la fonction f_λ est convexe sur \mathbb{R}_+^* .
e) Tracer, l'allure de la courbe représentative de f_1 dans le plan rapporté à un repère orthogonal (on donne $\exp(-1) \approx 0,37$).
2. a) Vérifier que la fonction $x \mapsto -e^{-\lambda\sqrt{x}}$ est une primitive de f_λ sur \mathbb{R}_+^* .
b) Établir la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f_\lambda(x) dx$ et calculer sa valeur.
c) En déduire que la fonction f_λ est une densité de probabilité sur \mathbb{R} .
3. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , à valeurs strictement positives, ayant f_λ pour densité.
On note F_λ la fonction de répartition de X et on pose : $Y = \lambda\sqrt{X}$. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) .
a) Calculer pour tout x réel, $F_\lambda(x)$.
b) Démontrer que la variable aléatoire Y suit une loi exponentielle de paramètre 1.
c) En déduire la valeur de l'espérance de X .
d) **Informatique.** Compléter la fonction Python `varX` suivante afin qu'elle renvoie une liste de n valeurs prises par la variable aléatoire X . On rappelle qu'avec la bibliothèque `numpy.random`, importée sous l'alias `rd`, l'appel `rd.exponential(1)` simule une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1.

```
import math
import numpy.random as rd

def varX(n,lambda):
    X=[]
    for i in range(n):
        X.append(...)
    return X
```

4. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) , indépendantes et de même loi que X .

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $J_n = n^2 M_n - \frac{1}{n}$. On admet que M_n et J_n sont des variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

- a) **Informatique.** Les figures ?? et ?? présentent des histogrammes représentant la répartition de 1000 valeurs prises respectivement par les variables aléatoires J_{10} , J_{100} , J_{1000} et X dans les cas où $\lambda = 0,5$ puis $\lambda = 1$.

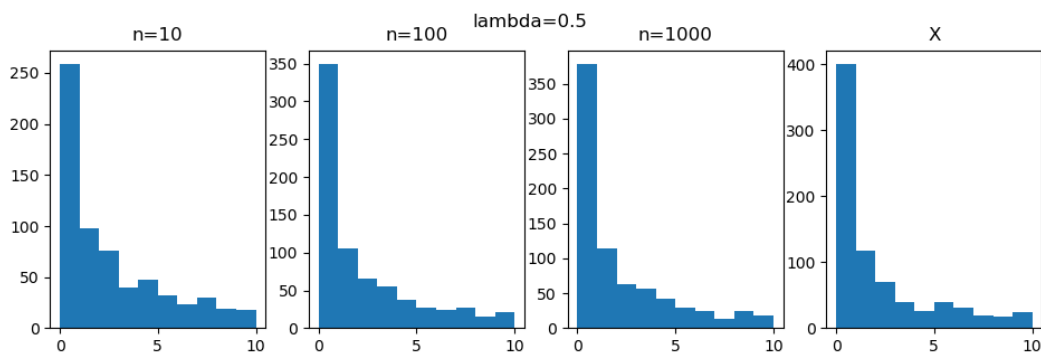


FIGURE 1 – Cas $\lambda = 0,5$.

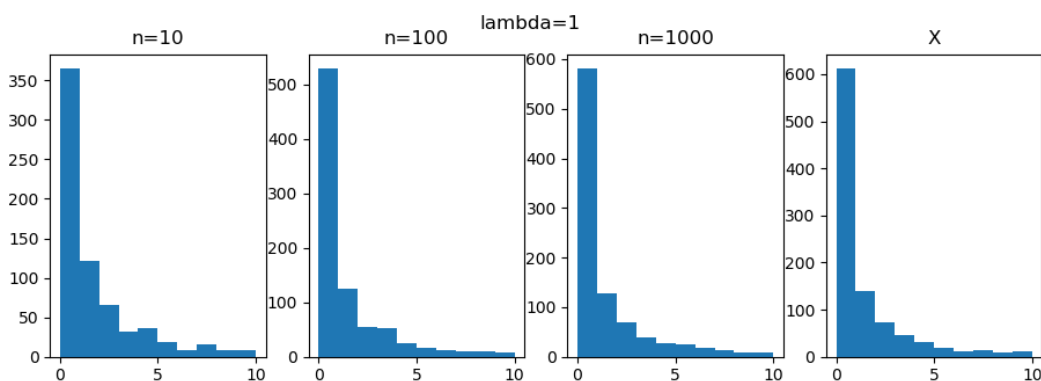


FIGURE 2 – Cas $\lambda = 1$.

Quelle conjecture pouvez-vous émettre ?

- b) **Informatique.** On prend $\lambda = 1$. Écrire une fonction Python `varJ(n)` qui renvoie une liste de 1000 valeurs simulant la variable aléatoire J_n et qui utilise la fonction `varX` de la question ??. On rappelle qu'avec la bibliothèque `numpy`, importée sous l'alias `np`, l'appel `np.min(L)` donne le minimum d'une liste de nombres `L`.
- c) Démontrer que la fonction de répartition de M_n est donnée par :

$$G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-n\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- d) En déduire la fonction de répartition H_n de la variable aléatoire J_n .
- e) Démontrer, quelque soit la valeur de $\lambda > 0$, la conjecture émise à la question ??.

Exercice 3

Étude d'une marche aléatoire

On considère trois points distincts du plan A , B et C . Le but de l'exercice est d'étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A . Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n : il ne dépend donc pas des positions occupées aux autres étapes précédentes.
- pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

- A_n l'évènement « le pion se trouve en A à l'étape n »,
- B_n l'évènement « le pion se trouve en B à l'étape n »
- C_n l'évènement « le pion se trouve en C à l'étape n ».

Pour tout n entier naturel, on note également : $p_n = P(A_n)$, $q_n = P(B_n)$, $r_n = P(C_n)$ ainsi que $V_n = (p_n \ q_n \ r_n)$, le n -ème état de cette chaîne de Markov.

Partie I - Modélisation

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste et expliquer pourquoi la matrice de transition est :

$$M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

2. a) Déterminer p_0, q_0, r_0 ainsi que p_1, q_1, r_1 .
b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation : $V_{n+1} = V_n M$.
c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n = V_0 M^n$.

Partie II - Calcul des puissances de la matrice M et application

3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.
- b) Calculer $A^2 - 5A$.
Quelle sont les valeurs propres possibles de A ?
- c) Déterminer une matrice inversible P ainsi qu'une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = P D P^{-1}$.
On calculera la matrice P^{-1} .
- d) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $A^n = P D^n P^{-1}$.

4. La chaîne de Markov associée au graphe probabiliste de la question ?? a-t-elle un état stable ?
Lequel ?
5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
- a) Démontrer que : $M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$, où M est la matrice introduite à la question ??.
- b) Démontrer que $p_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{4^n} \right)$ et déterminer alors une expression de q_n et r_n .
6. Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Interpréter ces résultats.

Partie III - Nombre moyen de passages en A et temps d'attente avant le premier passage en B

7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } \overline{A}_n \text{ est réalisé} \end{cases}$$

- a) Interpréter la variable aléatoire $S_n = X_1 + \dots + X_n$.
Quelle est la signification de l'espérance $\mathbb{E}(S_n)$?
- b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n .
- c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre moyen de passage en A entre l'étape 1 et l'étape n .
8. On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante : T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B , et dans le cas où le point ne passe jamais en B , on pose $T_B = 0$.

Le but de cette question est de déterminer la loi de la variable aléatoire T_B ainsi que son espérance.

- a) Calculer les probabilités $P(T_B = 1)$ et $P(T_B = 2)$.
- b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer l'événement \overline{B}_n à l'aide des événements A_n et C_n .
- c) Démontrer que $P(B_3 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_1) = \frac{1}{4} P(\overline{B}_2 \cap \overline{B}_1)$.
En déduire que $P_{\overline{B}_2 \cap \overline{B}_1}(B_3) = \frac{1}{4}$.

Dans la suite de l'exercice, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n l'événement $\bigcap_{k=1}^n \overline{B}_k$ et on

admettra que : $P_{D_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}$.

- d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité $P(T_B = k)$.
En déduire la probabilité $P(T_B = 0)$.
- e) Justifier que la variable aléatoire T_B admet une espérance. Quelle est l'espérance de T_B ?

Fin de l'énoncé