Sujet 0, Option mathématiques approfondies

Exercice 1

Une variable à densité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour x réel, par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. a) Étudier la fonction f et tracer l'allure de son graphe (on précisera les demi-tangentes au point d'abscisse 1).
   b) Démontrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

2. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont une densité est f.
   a) Déterminer la fonction de répartition F de X. Tracer son graphe (on précisera les demi-tangentes au point d'abscisse 1).
   b) Démontrer que F réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]0, 1[$ et déterminer la bijection réciproque G.

3. On conserve les notations introduites à la question précédente. Soit U une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi uniforme sur $]0, 1[$.
   a) On admet que $Y = G(U)$ est une variable aléatoire. Déterminer sa loi.
   b) **Informatique.** Expliquez le but des deux fonctions Python suivantes :

```
def G(x):
    return 1/((1-x)**2)


def varX(n):
    from numpy.random import random
    X=[]
    for i in range(n):
        X.append(G(random()))
    return X
```

   c) **Informatique.** On considère la fonction Python suivante, qui utilise la fonction `varX` précédente :

```
def moyX(n):
from numpy import mean
    return mean(varX(n))
```

   Cinq appels `moyX(1000)` donnent successivement comme résultats (arrondis à l'unité) :

   1422   3812326   11468   2447   1827

   Que conjecturez-vous ?
   Démontrer votre conjecture.

4. On considère maintenant une suite (X_k) de variables aléatoires indépendantes de même loi que la variable X de la question 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$Z_n = \inf(X_1, \ldots, X_n)$$

a) Soit $n \geqslant 1$ entier. Expliquer pourquoi, pour tout x réel, $[Z_n \leqslant x]$ est bien un événement.

Cela permet de justifier que Z_n est bien une variable aléatoire et de considérer la fonction de répartition G_n de la variable Z_n.

b) Démontrer que pour tout x réel on a : $G_n(x) = 1 - \big(1 - F(x)\big)^n$.

c) Soit $n \geqslant 1$ entier. La variable aléatoire Z_n est-elle à densité ?

d) **Informatique.** Écrire un script Python, utilisant la fonction `varX` de la question **??** permettant de simuler la variable aléatoire Z_n.
On rappelle qu'avec la bibliothèque `numpy`, importée sous l'alias `np`, l'appel `np.min(L)` donne le minimum d'une liste de nombres `L`.

e) La figure **??** présente des histogrammes représentant la répartition de 1000 valeurs prises respectivement par des simulations des variables aléatoires Z_{10}, Z_{100}, Z_{1000}.

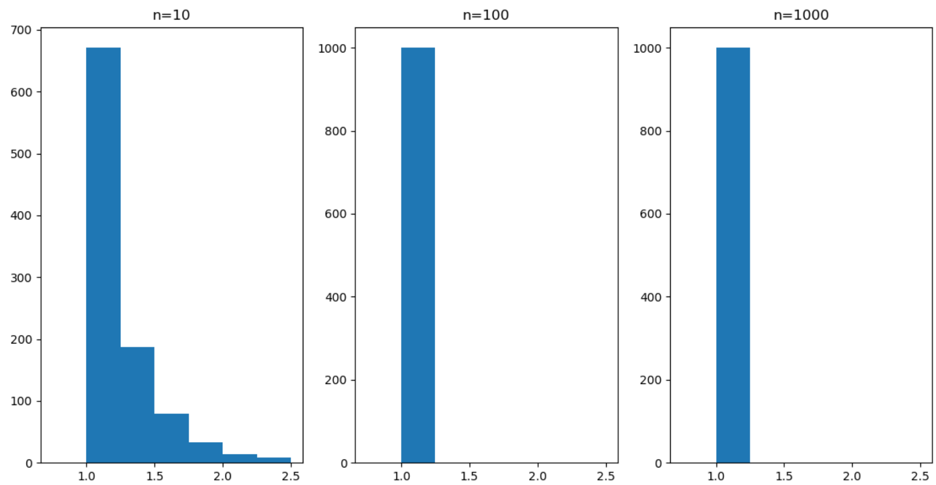

FIGURE 1 – Répartition des valeurs prises par Z_n.

Que laissent suggérer ces graphiques ?

f) Etudier la convergence en loi de la suite de variable aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, α est un nombre réel.

1. Démontrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente.

Dans la suite de l'exercice, pour tout $x \in]-1, 1[$, on pose : $f_\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$.

2. Expliciter les fonctions f_0 et f_{-1}

Dans la suite de l'exercice, on suppose que α appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

3. La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?
4. Justifier que, pour tout $x \in]0, 1[$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Dans la suite de l'exercice, pour tout $x \in]0, 1[$, on pose :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

5. On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie correctement sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   Soit $x \in]0, 1[$. Démontrer que :

$$I(x) = (-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha).$$

6. Soit $x \in]0, 1[$. On considère la fonction $u_{x,\alpha}$ définie pour $t > 0$ par : $u_{x,\alpha}(t) = \dfrac{x^t}{t^\alpha}$.
   a) Démontrer que la fonction $u_{x,\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que :

$$u_{x,\alpha}(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} u_{x,\alpha}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant u_{x,\alpha}(k)$$

   et en déduire l'encadrement : $f_\alpha(x) - x \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} u_{x,\alpha}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f_\alpha(x)$.

   c) Démontrer l'encadrement : $I(x) - \displaystyle\int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant f_\alpha(x) \leqslant I(x)$.
7. Déterminer un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1, à l'aide de la fonction Γ.

Problème

Des polynômes orthogonaux

Notations.

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $[\![0, n]\!]$ l'ensemble $\{p \in \mathbb{N} / \ 0 \leqslant p \leqslant n\}$.
- On note $\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
- Pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[x]$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$, on note encore P la fonction polynomiale associée définie sur $\mathbb{R}$.
- Lorsque $P \in \mathbb{R}[x]$, P' et P'' désignent respectivement les fonctions dérivées première et seconde de P.
- On pose pour tout le problème $A(x) = x^2 - 1$ et $B(x) = 2x$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $P_k(x) = x^k$, de sorte que si $n \in \mathbb{N}$, $\beta = (P_0, \ldots, P_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels.

Objectifs.

Dans une première partie, on introduit une famille de polynômes (P_k) vecteurs propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$. L'objet de la seconde partie est l'étude, dans un cas particulier, d'une famille de polynômes orthogonaux de $\mathbb{R}_n[x]$. La troisième partie généralise l'exemple de la seconde partie.

Partie I - Étude d'un endomorphisme

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on pose : $\Phi(P) = AP'' + BP'$.

1. a) Démontrer que si $P \in \mathbb{R}_n[x]$ alors $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[x]$.
   b) Démontrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. a) Calculer $\Phi(P_0)$ et $\Phi(P_1)$.
   b) Pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$ calculer $\Phi(P_k)$.
   c) Déterminer la matrice M de Φ dans la base canonique $\beta = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$.
   d) En déduire le spectre de Φ.
3. L'endomorphisme Φ est-il bijectif ?
4. Déterminez le noyau de Φ.
5. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Partie II - Un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dès que P et Q sont des polynômes dans $\mathbb{R}_n[x]$ on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t) \, \mathrm{d}t$$

6. Démontrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

Dans la suite de cette partie, on munit $\mathbb{R}_n[x]$ de ce produit scalaire.

7. **Une base orthogonale de vecteurs propres de Φ.** Dans cette question Φ désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ introduit dans la partie I.
   a) Soient P et Q dans $\mathbb{R}_n[x]$. On pose $R = (P'Q - PQ')A$.
   Démontrer que $R' = \Phi(P)Q - P\Phi(Q)$.
   b) Démontrer que l'endomorphisme Φ est symétrique.
   c) Montrer qu'il existe une base orthogonale $(Q_0, \ldots, Q_n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$ formée de vecteurs propres de Φ, unitaires, tels que $\deg(Q_k) = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
   d) Justifier que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ le polynôme Q_k est dans l'orthogonal de $\mathbb{R}_{k-1}[x]$.

Partie III - Généralisation

Dans toute cette partie $\mathbb{R}[x]$ est muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$, cette notation étant indépendante de celle de la partie II.

On appelle *système orthogonal* toute suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes :
- $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale, c'est-à-dire : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i \neq j \Rightarrow \langle Q_i, Q_j\rangle = 0$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n est unitaire et de degré n.

8. On suppose qu'il existe un système orthogonal $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ est une base orthogonale de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note F_n l'orthogonal de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_{n+1}[x]$.
   Démontrer que $\mathrm{vect}(V_{n+1}) = F_n$.
9. Justifier qu'il existe effectivement un système orthogonal $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   On pourra procéder par récurrence.
10. On suppose que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un autre système orthogonal.
   Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $W_n = V_n$.

Fin de l'énoncé
