ecricome

CONCOURS D'ADMISSION 2024

3

prépa

Mathématiques Technologiques

Série Technologique

Lundi 15 avril 2024 de 8h00 à 12h00
Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8h00 – 13h20

L'énoncé comporte 7 pages.

INSTRUCTIONS

Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.

Exercice 1

On considère trois suites $(r_n)_{n\geqslant 0}$, $(s_n)_{n\geqslant 0}$ et $(t_n)_{n\geqslant 0}$ définies par la donnée de $r_0 = 2$, $s_0 = 10$ et $t_0 = 1$

et, pour tout entier naturel n, $$\begin{cases} r_{n+1} &= -\frac{1}{4}s_n + 2t_n \\ s_{n+1} &= r_n + s_n - t_n \\ t_{n+1} &= \frac{1}{2}t_n + 1. \end{cases}$$

On introduit les matrices

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose également $X_n = \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \\ t_n \end{pmatrix}$.

1. On pose $M = A - I$.
   (a) Expliciter la matrice M.
   (b) Montrer que $(2M + I)^3 = 0$.
   (c) En déduire que $M(8M^2 + 12M + 6I) = -I$.
   (d) Justifier que M est inversible et donner son inverse en fonction de M et de I.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n + B$.
3. (a) Vérifier que $AC + B = C$.
   (b) Montrer que $I - A$ est inversible.
   (c) En déduire que C est l'unique matrice colonne telle que $X = AX + B$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n - C = A^n(X_0 - C)$.
5. (a) Montrer que $(2A - I)^3 = 0$. En déduire que $\frac{1}{2}$ est la seule valeur propre possible de A.
   (b) On suppose dans cette question uniquement que A est diagonalisable.
      i. Montrer qu'il existe une matrice R inversible telle que $\frac{1}{2}I = R^{-1}AR$.
      ii. En déduire que $A = \frac{1}{2}I$.
      iii. Conclure que A n'est pas diagonalisable.
6. On définit les trois matrices

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer QP.
   (b) En déduire que P est inversible et donner son inverse à l'aide de la matrice Q.
   (c) Vérifier que $A = \frac{1}{4}PTQ$.
   (d) Montrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = \frac{1}{2^{n+1}}PT^nQ$.

(e) Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On admet alors que, pour tout entier naturel n,

$$A^n = \frac{1}{2^{n+1}} \begin{pmatrix} -2n+2 & -n & -3n^2+11n \\ 4n & 2n+2 & 6n^2-10n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel n,

$$r_n = 2 + \frac{1}{2^{n+1}}\Big(3n^2 - 13n\Big), \quad s_n = 8 + \frac{1}{2^n}\Big(-3n^2 + 7n + 2\Big) \quad \text{et} \quad t_n = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

8. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\ln\left(\frac{n^2}{2^n}\right) = n\left(\frac{2\ln(n)}{n} - \ln(2)\right).$$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n}$.

(b) Déterminer les limites des trois suites $(r_n)_{n\geqslant 0}$, $(s_n)_{n\geqslant 0}$ et $(t_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{4}{1+e^x}.$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Partie 1

1. (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
La courbe représentative de f admet-elle une asymptote en $-\infty$? Si oui, donner son équation.

   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
La courbe représentative de f admet-elle une asymptote en $+\infty$? Si oui, donner son équation.

2. (a) Calculer la dérivée de f et déterminer le signe de f'.

   (b) Dresser le tableau de variation de f en faisant apparaître les limites et la valeur de $f(0)$.

   (c) Quelle est la position de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = 4$?

   (d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 0$.

3. (a) Montrer que la dérivée seconde de f est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \frac{4e^x(e^x - 1)}{(1+e^x)^3}.$$

   (b) En déduire que f possède un unique point d'inflexion et préciser un intervalle sur lequel f est convexe et un intervalle sur lequel f est concave.

   (c) Déterminer alors la position relative de la courbe représentative de f avec sa tangente au point d'abscisse $x = 0$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f, les asymptotes et la tangente au point d'abscisse 0.

5. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 4\,\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

   (b) Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Partie 2

6. Soit g la fonction définie sur $]0,4[$ par $g(y) = \ln\left(\frac{4}{y} - 1\right)$ pour tout réel y de $]0,4[$.

   (a) Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,4[$.

   (b) i. Pour tout $y \in]0\,,\,4[$, calculer $f(g(y))$.

   ii. Que représente la fonction g pour la fonction f ?

   (c) Déterminer les réels x tels que $0,05 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

7. Un fabriquant de rampes de skatepark veut lancer un prototype de rampe. Ainsi il crée une rampe de skatepark dont le profil, c'est-à-dire la forme de la pente, est la courbe de la fonction f. La largeur de la rampe est 1 mètre.
   Ce fabriquant souhaite que la hauteur maximale de cette rampe soit 2 mètres et que la hauteur minimale soit 5 centimètres.

   (a) Démontrer que la longueur sur le sol de la rampe vaut $\ln(79)$ mètres.

   (b) La rampe est conçue par un moulage en béton et prévoit une pente d'un mètre de large si bien que le volume total de béton prévu est donné par l'aire de la surface du profil (surface grisée).

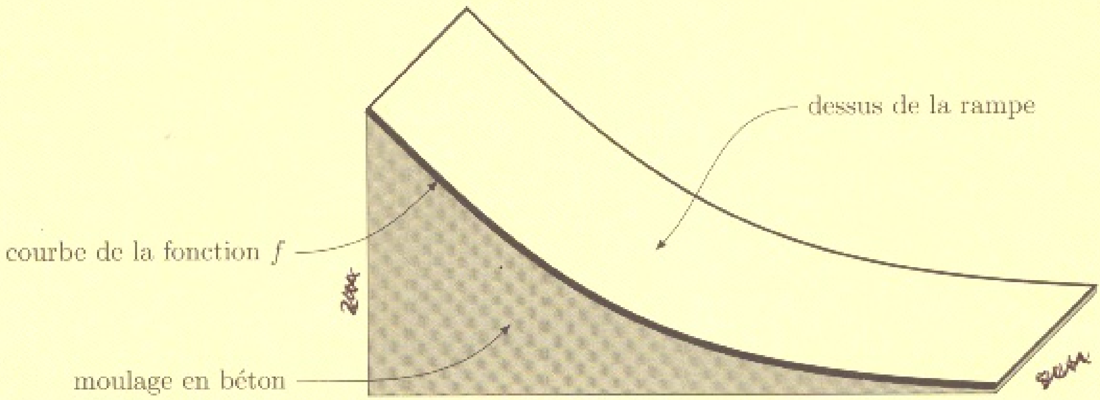


FIGURE 1 – Rampe de skatepark

Déterminer le volume de béton à prévoir pour construire la rampe.

Partie 3

8. Soit $h : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$

   (a) Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge et montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = 4\ln(2)$.

   (b) Montrer qu'il existe un réel α tel que αh soit une densité de probabilité.

   Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$.
   On considère X la variable aléatoire à densité définie par $X = -\ln\left(e^{(1-U)\ln(2)} - 1\right)$.

   (c) Rappeler la fonction de répartition de U.

   (d) Justifier que : $\forall x \in [0,+\infty[,\ 1 - \dfrac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)} \in [0,1[$.

   (e) Montrer que : $\forall x \in [0,+\infty[,\ P([X \leqslant x]) = P\left(\left[\ln(1+e^{-x}) \leqslant (1-U)\ln(2)\right]\right) = 1 - \dfrac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)}$.

   (f) Déterminer alors la fonction de répartition de X et montrer que X est une variable aléatoire à densité de densité αh.

(g) Écrire une fonction en langage Python, nommée `simulX`, qui ne prend pas d'argument en entrée et renvoie une simulation de X.

(h) On admet que X admet une espérance. On considère le script Python suivant :

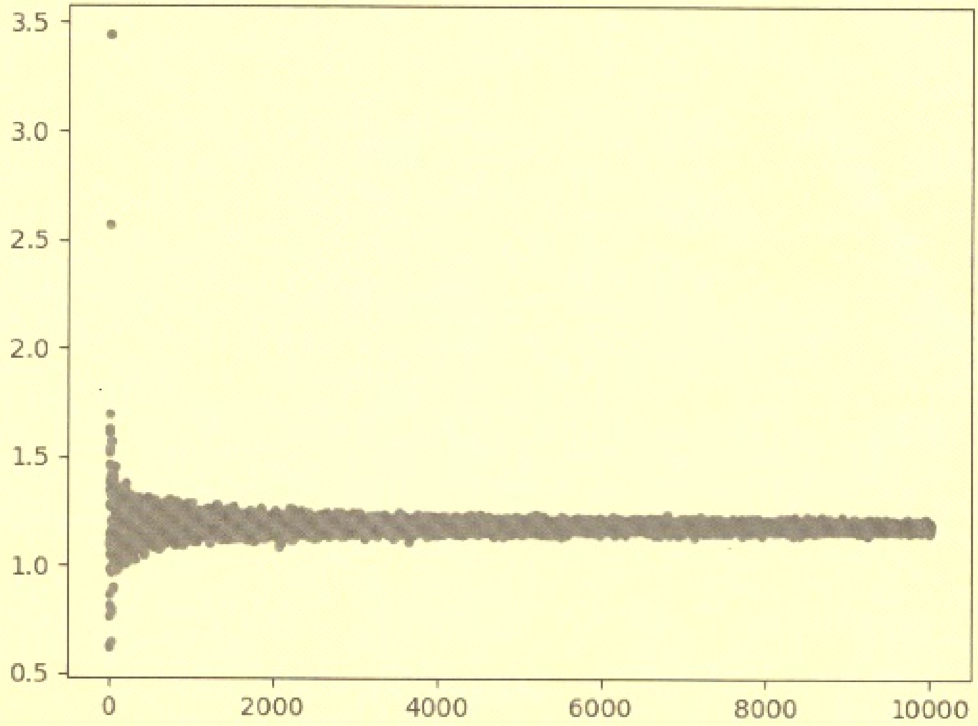
```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def secret(N):
    S = 0
    for k in range(N):
        S = S + simulX()
    return S/N

X = [k+1 for k in range(10000)]
M = [secret(N+1) for N in range(10000) ]

plt.plot(X,M,'.')
plt.show()
```

Quel résultat du cours permet d'expliquer le graphe obtenu ci-dessous après exécution du programme ci-dessus ?



Exercice 3

Partie 1

Dans cette partie, on considère trois suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ et $(c_n)_{n\geqslant 1}$ définies par la donnée des premiers termes $a_1 = \dfrac{3}{8}$, $b_1 = 0$ et $c_1 = \dfrac{5}{8}$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \begin{cases} a_{n+1} &= \dfrac{2}{11}a_n + \dfrac{3}{11}b_n + \dfrac{3}{11}c_n \\ b_{n+1} &= \dfrac{4}{11}a_n + \dfrac{3}{11}b_n + \dfrac{4}{11}c_n \\ c_{n+1} &= \dfrac{5}{11}a_n + \dfrac{5}{11}b_n + \dfrac{4}{11}c_n \end{cases}$$

1. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, $a_n + b_n + c_n = 1$.

On définit trois suites auxiliaires $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $(y_n)_{n\geqslant 1}$ et $(z_n)_{n\geqslant 1}$ par les relations : pour tout entier naturel n non nul,

$$x_n = a_n + b_n + c_n, \qquad y_n = -a_n + 2b_n - c_n \qquad \text{et} \qquad z_n = -5a_n - 5b_n + 7c_n.$$

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est constante.
3. (a) Montrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison $-\dfrac{1}{11}$.

   (b) Donner pour tout entier naturel n non nul, une expression de y_n en fonction de n.
4. (a) Montrer que la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique.

   (b) Donner pour tout entier naturel n non nul, l'expression de z_n en fonction de n.
5. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \dfrac{1}{3}(x_n + y_n)$ et que $c_n = \dfrac{1}{12}(5x_n + z_n)$.

   (b) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de a_n en fonction de x_n, de y_n et de z_n.

   (c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de a_n, de b_n et de c_n en fonction de n.
6. Déterminer les limites de $(a_n)_{n\geqslant 1}$, de $(b_n)_{n\geqslant 1}$ et de $(c_n)_{n\geqslant 1}$.

Partie 2

Un étang contient 3 goujons, 5 truites et 4 perches. Afin de ne pas vider l'étang, un pêcheur décide d'attraper un premier poisson et de le mettre dans son seau puis, à chaque fois qu'il attrape un poisson, il relâche sa dernière prise afin de placer la nouvelle dans son seau. On suppose qu'à chaque prise, le pêcheur attrape l'un des poissons disponibles dans l'étang avec équiprobabilité.
Cependant, pour le premier poisson pêché, les perches prennent peur lorsque le pêcheur lance sa ligne dans l'eau et elles se réfugient au fond de l'étang, ce qui fait qu'il devient impossible d'en attraper une. Après le premier poisson, les perches s'habituent au pêcheur et peuvent être attrapées comme n'importe quel autre poisson.
Pour tout entier naturel n non nul, on note

- G_n l'événement « le $n^{\text{ème}}$ poisson pêché est un goujon », de probabilité g_n,
- P_n l'événement « le $n^{\text{ème}}$ poisson pêché est une perche », de probabilité p_n,
- T_n l'événement « le $n^{\text{ème}}$ poisson pêché est une truite », de probabilité t_n.

7. Justifier que $g_1 = \dfrac{3}{8}$, $p_1 = 0$ et $t_1 = \dfrac{5}{8}$.
8. (a) Donner les probabilités conditionnelles $P_{G_1}(G_2)$ et $P_{T_1}(G_2)$.

   (b) En déduire la probabilité que le deuxième poisson attrapé soit un goujon.
9. Sachant que le pêcheur vient d'attraper son deuxième poisson et qu'il s'agit d'un goujon, quelle est la probabilité que le premier poisson pêché soit une truite ?

10. Soit n un entier naturel non nul.
    (a) Donner les probabilités conditionnelles $P_{G_n}(G_{n+1})$, $P_{P_n}(G_{n+1})$ et $P_{T_n}(G_{n+1})$.
    (b) Donner l'expression de g_{n+1} en fonction de g_n, t_n et de p_n à l'aide de la formule des probabilités totales.
    (c) De même sans les justifier donner une expression de p_{n+1} et de t_{n+1} en fonction de g_n, de t_n et de p_n.
11. À l'aide de la partie 1, en déduire l'expression de g_n, de p_n et de t_n uniquement en fonction de n.

Partie 3

Sur un grand lac, le concours récompense les pêcheurs ayant attrapé le plus de poissons en trois heures. Le lac étant tellement grand qu'on suppose que les chances d'attraper un poisson quel qu'il soit sont identiques et sont indépendantes du nombre de poissons déjà pêchés par les concurrents. Notre pêcheur est sur le lac et se concentre pour faire le plus de prises.

12. On a accès à une base de données SQL répertoriant les espèces de poissons présentes dans le lac sous forme d'une table nommée `poissons` dont le schéma relationnel est le suivant.

`poissons`
`id` : INTEGER
`espece` : TEXT
`quantite` : INTEGER
`taille` : INTEGER
`protection` : INTEGER

Chaque enregistrement de la table correspond à une espèce de poissons. Les attributs de la table sont décrits de la manière suivante

- `id` : un numéro permettant d'identifier une espèce
- `espece` : le nom de l'espèce
- `quantite` : le nombre d'individus
- `taille` : la taille moyenne des individus (en mm)
- `protection` : le statut protégé ou non de l'espèce (1 si protégée ; 0 sinon).

    (a) Identifier la clef primaire de la table `poissons`.
    (b) Une étude du lac a été effectuée et il a été constaté une modification de la taille moyenne des goujons, valant désormais 610 mm.
    Écrire une requête SQL permettant de mettre à jour la base de données concernant la taille moyenne des goujons (dont l'attribut `espece` est `"goujon"`).
    (c) Écrire une requête SQL permettant d'afficher la liste des poissons que les pêcheurs peuvent pécher, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas protégés et dont la taille moyenne est supérieure ou égale à 125 mm.
13. Dans cette question, on découpe les trois heures en périodes de 20 minutes. Pendant chaque période qu'on supposera indépendante, le pêcheur attrape au plus un poisson et la probabilité d'attraper un poisson est de $1/4$.
    (a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire U donnant le nombre de poissons attrapés par le pêcheur pendant une période.
    (b) Reconnaître la loi de la variable aléatoire V donnant le nombre de poissons attrapés par le pêcheur pendant le concours.
    (c) Quelle est la probabilité que le pêcheur termine le concours bredouille, c'est-à-dire qu'il n'ait attrapé aucun poisson ?

Tournez la page s.v.p.

14. Dans cette question, on suppose à présent que le nombre de poissons attrapés par le pêcheur sur toute la durée de l'épreuve est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

    (a) Rappeler $X(\Omega)$, $P([X = k])$ pour tout $k \in X(\Omega)$, ainsi que l'espérance et la variance de X en fonction de λ.

    (b) Quelle valeur faut-il donner à λ pour que le nombre moyen de poissons attrapés par le pêcheur sur les trois heures soit identiques dans les questions 13 et 14 ?

    (c) Avec la valeur de λ trouvée précédemment, quelle est la probabilité que le pêcheur termine le concours bredouille ?

15. À quelques mètres de sa barque, le pêcheur aperçoit son grand rival. On suppose toujours que le nombre de poissons attrapés par le pêcheur est donné par X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ quelconque. On suppose également que le nombre de poissons attrapés par le rival est donnée par une variable aléatoire Y suivant une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. À la fin du concours, le pêcheur et son rival ont attrapé 15 poissons à eux deux.

    (a) Justifier que $[X + Y = 15] = \bigcup\limits_{k=0}^{15} ([X = k] \cap [Y = 15 - k])$.

    (b) Montrer que $P([X + Y = 15]) = \dfrac{1}{15!} \displaystyle\sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} \lambda^k \mu^{15-k} e^{-\lambda-\mu}$.

    (c) En déduire $P([X + Y = 15])$ en fonction de λ et μ.

    (d) Calculer pour tout entier naturel k de $[\![0, 15]\!]$, la probabilité conditionnelle $P_{[X+Y=15]}([X = k])$ en fonction de λ, μ et k.

    (e) On admet qu'il existe une variable aléatoire Z telle que

    $$\forall k \in [\![0, 15]\!],\ P_{[X+Y=15]}([X = k]) = P([Z = k]).$$

    En remarquant que $\dfrac{\lambda}{\lambda + \mu} + \dfrac{\mu}{\lambda + \mu} = 1$, reconnaître la loi de Z.

    (f) Justifier que $P_{[X+Y=15]}([X \geqslant Y]) = P_{[X+Y=15]}([X \geqslant 8])$.
    Exprimer à l'aide d'une somme la probabilité que le pêcheur ait battu son rival en fonction de λ et μ.