

### EXERCICE 1.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$ .  
On rappelle que  $\forall b \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, b^x = e^{x \ln(b)}$ .

#### Partie A.

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $f$  la fonction définie par

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} a5^{-x} & \text{si } x > 0 \\ a5^x & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

On suppose que  $f$  est une densité de probabilité d'une variable aléatoire  $X$  définie sur  $\Omega$ .

1. Déterminer la valeur du réel  $a$ .
2. Déterminer la fonction de répartition de  $X$ .
3. Montrer que  $X^2$  admet une espérance et la calculer.

## Partie B.

Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $g$  la fonction définie par

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda}{(2+x)^2} & \text{si } x \in ]0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

On suppose que  $g$  est une densité de probabilité d'une variable aléatoire  $Z$  définie sur  $\Omega$ .

1. Déterminer la valeur de  $\lambda$ .
2. Déterminer la fonction de répartition de  $Z$ .
3. On suppose que  $Z(\Omega) = ]0, 1]$  et on pose  $Y = Z + \frac{1}{Z}$ . On admet que  $Y$  est une variable aléatoire définie sur  $\Omega$ . Déterminer l'ensemble des valeurs prises par  $Y$ .
4. Déterminer la fonction de répartition de  $Y$ .
5. La variable aléatoire  $Y$  est-elle à densité? Si oui, donner une densité de  $Y$ .

## EXERCICE 2.

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(nx) (\cos x)^n dx.$$

Le but de cet exercice est l'étude de la nature de la série de terme général  $u_n$  et le calcul de sa somme.

## Partie A.

1. (a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Exprimer  $\cos(2x)$  et  $\sin(2x)$  en fonction de  $\cos(x)$  et de  $\sin(x)$ .  
(b) En déduire la valeur de  $u_1$ .
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit la fonction  $f_n$  par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} \frac{1 - (1-t)^n}{t} & \text{si } t \in \mathbb{R}^* \\ n & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

- (a) Tracer le graphe de la fonction  $f_2$  dans le plan muni d'un repère orthonormé.
- (b) Tracer le graphe de la fonction  $f_3$  dans le plan muni d'un repère orthonormé.
- (c) Montrer que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- (d) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $f_n$  est-elle dérivable en 0? Si oui, donner  $f'_n(0)$ .
- (e) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} t^{k-1}.$$

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$I_n = \int_0^1 f_n(t) dt.$$

- (a) Calculer  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ .

(b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

(c) Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $\int_0^1 (1-t)^{k-1} dt$ .

(d) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

(e) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

4. (a) Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2px) dx = \frac{\pi(-1)^{p+1}}{4p}.$$

(b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \sin(2px) = 2^n \sin(nx) (\cos x)^n.$$

(c) Conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\pi}{2^{n+2}} I_n.$$

## Partie B.

5. Soit  $x \in [0, 1[$ . Soit  $\varphi_x$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} - \{1\}$  par :

$$\forall t \in \mathbb{R} - \{1\}, \quad \varphi_x(t) = \frac{x-t}{1-t}.$$

(a) Dresser le tableau de variations de  $\varphi_x$  sur  $\mathbb{R} - \{1\}$  en précisant les limites aux bornes.

(b) Montrer que :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \forall t \in [0, x], \quad 0 \leq \varphi_x(t) \leq x.$$

(c) Trouver un réel  $a$  tel que

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \forall t \in [0, x], \quad \frac{\varphi_x(t)}{1-t} = \frac{x-1}{(1-t)^2} + \frac{a}{1-t}.$$

6. Soit  $h$  la fonction définie sur  $[0, 1[$  par :

$$h(x) = -\ln(1-x).$$

(a) Dresser le tableau de variations de  $h$  sur  $[0, 1[$  en précisant les limites aux bornes.

(b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, 1[, \quad h(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + R_n(x) \quad \text{avec} \quad R_n(x) = \int_0^x \frac{(\varphi_x(t))^n}{1-t} dt.$$

(c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, 1[, \quad 0 \leq R_n(x) \leq -x^n \ln(1-x).$$

(d) Montrer que pour tout  $x \in [0, 1[$ , la série de terme général  $\frac{x^k}{k}$  converge.

7. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que

$$\forall x \in [0, 1[, \quad (1-x) \sum_{k=1}^n I_k x^k = h(x) - R_n(x) - I_n x^{n+1}.$$

(b) Montrer que, pour tout  $x \in [0, 1[$ , la série de terme général  $I_k x^k$  converge et que

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} I_k x^k = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

(c) En déduire la convergence de la série de terme général  $u_k$  et calculer la valeur de  $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ .

### EXERCICE 3.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$ . Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On dit que  $X$  est stochastiquement inférieure à  $Y$  et l'on note  $X \leq_{st} Y$  si l'on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X \geq t) \leq \mathbb{P}(Y \geq t).$$

#### Partie I.

Soit  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , une fonction croissante et bornée.

1. La fonction  $h$  admet-elle une limite finie en  $+\infty$ ? Justifier.
2. Montrer que  $h(X)$  et  $h(Y)$  admettent des espérances que l'on notera  $\mathbb{E}(h(X))$  et  $\mathbb{E}(h(Y))$ .
3. Montrer que la série de terme général  $(h(n) - h(n-1))$  converge.
4. Montrer que la série de terme général  $(h(n) - h(n-1)) \mathbb{P}(X \geq n)$  converge.
5. Soit  $N \in \mathbb{N}$ , montrer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X \geq N+1) = 0.$$

6. Etablir la relation suivante :

$$\mathbb{E}(h(X)) = h(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} (h(n) - h(n-1)) \mathbb{P}(X \geq n).$$

7. En déduire que si  $X \leq_{st} Y$ , alors  $\mathbb{E}(h(X)) \leq \mathbb{E}(h(Y))$ .

#### Partie II.

On souhaite montrer la réciproque.

On suppose que pour toute fonction  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  croissante et bornée, on a  $\mathbb{E}(h(X)) \leq \mathbb{E}(h(Y))$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $h_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{N}$  par

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad h_n(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < n \\ 1 & \text{si } i \geq n \end{cases}$$

Montrer que la fonction  $h_n$  est croissante et bornée.

2. En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X \geq n) \leq \mathbb{P}(Y \geq n)$ .
3. Montrer que  $X$  est stochastiquement inférieure à  $Y$ .
4. Enoncer le théorème que vous venez de démontrer.

### Partie III.

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , indépendantes, telles que  $X \leq_{st} Y$ . Soit  $Z$  une variable aléatoire indépendante de  $X$  et de même loi que  $X$ .

1. Montrer que

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y \geq k).$$

2. En déduire que

$$\mathbb{P}(X \leq Y) \geq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Z \geq k).$$

3. Montrer que

$$\mathbb{P}(Z \geq X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Z \geq k).$$

4. Montrer que

$$\mathbb{P}(Z = X) > 0.$$

5. En déduire que

$$\mathbb{P}(Z \geq X) > \frac{1}{2}.$$

6. Montrer que

$$\mathbb{P}(X \leq Y) > \frac{1}{2}.$$

### EXERCICE 4

Soit  $n \geq 2$  un entier naturel. Pour tout  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ , on note

$$A(\lambda) = A(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \\ 0 & \cdots & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, si l'on note  $a_{i,j}$  le coefficient de  $A(\lambda)$  situé à la ligne  $i$  et la colonne  $j$ ,

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{i,j} = \begin{cases} \lambda_j & \text{si } i = n + 1 - j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note

$$\mathcal{E}_n = \{A(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\}.$$

Ainsi,  $\mathcal{E}_n$  est l'ensemble des matrices de la forme  $A(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  lorsque  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  décrit  $\mathbb{R}^n$ .

1. L'ensemble  $\mathcal{E}_n$  est-il un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel? Si oui, en donner une base.

2. On considère, dans cette question seulement, le cas  $n = 2$ .

(a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres réelles de la matrice  $A(1, 1)$ .

(b) Déterminer l'ensemble des valeurs propres réelles de la matrice  $A(1, -1)$ .

(c) Toutes les matrices de  $\mathcal{E}_2$  sont-elles inversibles? Justifier la réponse.

- (d) Toutes les matrices de  $\mathcal{E}_2$  sont-elles diagonalisables sur  $\mathbb{R}$ ? Justifier la réponse.
- (e) Soit  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ . Discuter du nombre de valeurs propres réelles de la matrice  $A(\lambda_1, \lambda_2)$  en fonction du signe du produit  $\lambda_1 \lambda_2$ .
- (f) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Trouver une condition nécessaire et suffisante sur  $\lambda$  pour que la matrice  $A(0, \lambda)$  soit diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .
- (g) Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$  et définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$ .

On pose

$$\forall \omega \in \Omega, \quad A(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & X(\omega) \\ Y(\omega) & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer la probabilité de l'événement

$$\{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R}\}.$$

- (h) Soit  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi de Poisson de paramètre  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  et définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$ .

On pose

$$\forall \omega \in \Omega, \quad A(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & X(\omega) \\ Y(\omega) & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer la probabilité de l'événement

$$\{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R}\}.$$

3. On considère, dans cette question seulement, le cas  $n = 3$ .

- (a) La matrice  $A(1, 1, 1)$  est-elle inversible? Justifier.
- (b) Montrer que 1 et  $-1$  sont valeurs propres de la matrice  $A(1, 1, 1)$ .
- (c) Déterminer l'ensemble des valeurs propres réelles de la matrice  $A(1, 1, 1)$ .
- (d) Déterminer une base orthonormée de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $A(1, 1, 1)$ .
- (e) Donner un exemple de matrice de  $\mathcal{E}_3$  diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  et un exemple de matrice de  $\mathcal{E}_3$  non diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ . Justifier chaque réponse.

4. On revient désormais au cas général avec une valeur quelconque de l'entier  $n \geq 2$ .

- (a) Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ . Soit  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ . Calculer le produit  $A(\lambda)A(\mu)$ .
- (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  pour que  $A(\lambda)$  soit inversible. Dans ce cas, donner l'inverse de  $A(\lambda)$ .

5. Dans toute la suite,  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2.

Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $f_\lambda$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dont la matrice représentative dans la base  $\mathcal{B}$  est  $A(\lambda)$ .

Soit  $F$  un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $F$  est stable par  $f_\lambda$  si

$$\forall x \in F, \quad f_\lambda(x) \in F.$$

- (a) Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $F_k = \text{Vect}(e_k, e_{n+1-k})$ .  
Montrer que  $F_k$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  stable par  $f_\lambda$ .  
Préciser la dimension de  $F_k$ .

- (b) Construire une base de  $\mathbb{R}^n$  dans laquelle la matrice de  $f_\lambda$  s'écrit

$$\begin{pmatrix} A(\lambda_1, \lambda_n) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & A(\lambda_2, \lambda_{n-1}) & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A(\lambda_{n/2}, \lambda_{n/2+1}) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A(\lambda_1, \lambda_n) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & A(\lambda_2, \lambda_{n-1}) & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & A(\lambda_{\frac{n-1}{2}}, \lambda_{\frac{n+3}{2}}) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{\frac{n+1}{2}} \end{pmatrix}$$

si  $n$  pair si  $n$  impair

- (c) Déterminer les valeurs propres réelles de la matrice  $A(1, 2, 3, \dots, n)$ .  
La matrice est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ ?