BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Mathématiques approfondies

Conception EDHEC

Session 2025

Présentation de l'épreuve

- L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.

La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme.

- Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet bien adapté au public concerné, mais ils constatent avec étonnement que trop de candidats ont des problèmes avec la manipulation des équivalents notamment en les composant dans l'exercice 1, avec les objets de l'algèbre bilinéaire souvent confondus (vecteurs, sous-espaces vectoriels, endomorphismes) dans l'exercice 2, avec la recherche de fonctions de répartition (celles trouvées n'en sont pas toujours) dans l'exercice 3, et avec les calculs nécessitant un peu de technicité dans le problème.

Description du sujet

L'exercice 1, portant sur la partie analyse du programme, proposait l'étude de la fonction f_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ définie par : $\forall x \in]n, +\infty[, \ f_n(x) = (x-n)\ln(x) - x\ln(x-n)$.

La seconde moitié de l'exercice proposait l'étude de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $f_n(x_n) = 0$ et la recherche d'un équivalent de $x_n - n - 1$.

Cet exercice a semblé plaire à l'ensemble des candidats, les premières questions étant plutôt bien réussies par la majorité d'entre eux, mais dans les dernières questions, la manipulation un peu fine des équivalents a départagé très nettement les très bons candidats des autres.

Certains candidats citent les croissances comparées pour justifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$ alors que la limite n'est pas indéterminée, d'autres affirment que, comme x_n est équivalent à n alors $x_n - n$ tend vers 0, et plus simplement un grand nombre semble ne pas voir que $\dfrac{\ln(4)}{4} = \dfrac{\ln(2)}{2}$.

Enfin la faute la plus fréquente a consisté à conclure sans aucun argument que, comme $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$, alors $\ln(x_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$: la composition d'équivalents n'est pas autorisée par le programme car elle mène souvent à des résultats irrecevables.

L'exercice 2, portant sur la partie algèbre bilinéaire du programme, proposait de prouver que, si p_1 et p_2 sont deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E (respectivement sur F_1 et F_2), alors on a l'équivalence :

$$p_1 \circ p_2 \text{ est un projecteur orthogonal de } E \text{ si, et seulement si, } p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$$

Cet exercice a, dans l'ensemble, été peu abordé et très peu réussi, tant les connaissance en algèbre (linéaire et bilinéaire) semblent fragiles. Seuls les excellents candidats ont pu s'y exprimer avec bonheur en réussissant brillamment la totalité des questions.
Les candidats ayant abordé cet exercice ont souvent confondu vecteur, sous-espace vectoriel et endomorphisme ! La plupart oublient de traiter la linéarité pour établir que p est un projecteur de E.
La maîtrise de la notion de somme directe a fait défaut chez les candidats qui ont cru bon de devoir l'utiliser : beaucoup pensent que, comme $E = F \oplus F^{\perp}$, alors si $x \in E$, on a, soit $x \in F$, soit $x \in F^{\perp}$, ce qui révèle une confusion avec la réunion disjointe de deux ensembles.

L'exercice 3, portant sur la partie probabilités du programme, s'intéressait à une variable aléatoire X prenant des valeurs négatives, de densité la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} -2x\,e^{-x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, puis à un problème de convergence en loi d'une suite de variables aléatoires vers X.
Une fonction Python proposait la simulation de X, et une autre renvoyant l'espérance de X était demandée.
Globalement, c'est l'exercice le mieux réussi de l'avis de la majorité des correcteurs bien que la gestion des fonctions de répartition ait souvent posé problème.

Chez un certain nombre de candidats, l'expression d'une densité pour une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres 0 et $\frac{1}{2}$ est source de grosses erreurs.
Donner la valeur 0 à $F(x)$ sur $[0,+\infty[$ ou $H(x)$ sur $]1,+\infty[$ est une très grave faute. Par ailleurs, donner la bonne valeur (à savoir 1) sans preuve ne permet pas d'accorder le bénéfice du doute...
Il aurait été apprécié de vérifier que lorsque n est suffisamment grand, on a $1+\frac{y}{n} > 0$ afin de pouvoir prendre le logarithme.

Le problème, portant sur les parties analyse et probabilités du programme, proposait, dans une première partie, d'écrire une fonction Python permettant le calcul de $B_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$.
La deuxième partie proposait l'étude de la suite des intégrales de Wallis définie par :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, dt$$

Plus précisément, on étudiait le lien entre les suites $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La troisième partie proposait d'étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, où les X_k sont des variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,1\}$ et telles que $P(X_k = 1) = P(X_k = -1)$, puis de trouver un équivalent de l'espérance de la variable aléatoire R_n définie par $R_n = \mathrm{Card}\{k \in [\![1,n]\!],\ S_{2k} = 0\}$.

Pour finir, la quatrième partie proposait d'étudier la fonction f définie sur [0,4[par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ puis d'en tracer la courbe représentative.

Le problème a été abordé par de nombreux candidats, mais presque jamais dans son intégralité certainement par manque de temps.

Un nombre important de candidats ont été obligés de bluffer, car ils étaient embarqués dans des récurrences inutiles ou car ils ne trouvaient pas ce qui était demandé (par défaut de cours ou en manquant de précision dans leurs calculs).

Trop de candidats ont appliqué la linéarité de la dérivation pour dériver $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$, mais ceci n'est pas valable avec une somme infinie.

Rappelons à tout le monde le bon usage des parenthèses : le produit de $2n+1$ par B_n ne s'écrit pas $2n+1B_n$ mais $(2n+1)B_n$.

Signalons quelques unes des nombreuses fautes de rigueur commises, comme :

« $x\in[0,\pi/2]$ donc $\sin(x)>0$ ».

« $x\leq y$ donc $x^n<y^n$ ».

« $B_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{k+n}{4k}$ donc $B_{n+1}=\prod_{k=1}^{n+1}\frac{k+n}{4k}$ ».

Pour finir, un défaut de cours suivi d'une escroquerie :

$$« \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n=\frac{1}{1-x/4} \text{ puis } \frac{1}{1-\frac{x}{4}}=\frac{x}{4-x} »$$

Statistiques

• Pour l'ensemble des 2993 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 11,25 sur 20 (très légèrement supérieure à celle de l'année dernière), la médiane est égale à 11,4 et l'écart type vaut 5,52 (identique à celui de l'année dernière, et toujours très important, ce qui est signe d'un classement efficace des candidats).

• 31% des candidats, contre 30,9% l'année dernière, ont une note inférieure à 8 (dont 12,2% ont une note inférieure à 4 contre 13,7% l'année dernière).

• 22,9% des candidats ont une note comprise entre 8 et 12 (pourcentage un peu inférieur à celui de l'année dernière qui était égal à 23,6%).

• 24,3% des candidats ont une note supérieure ou égale à 16 (pourcentage un peu supérieur à celui de l'année dernière qui était égal à 22,6%).

Conclusion

Comme l'année dernière, le niveau est très hétérogène et l'impression générale ressentie à la lecture des copies amène à penser que les notions courantes, les calculs classiques et les raisonnements simples sont maîtrisés par un grand nombre de candidats, mais dès que l'énoncé propose une réflexion plus fine, présente une notion un peu théorique ou un calcul « fin », il ne reste que peu de candidats pouvant se hisser à ce niveau : ceux qui ont pu le faire ont clairement fait la différence sur le gros de la troupe.

Sur la forme, les copies sont dans l'ensemble agréablement présentées et rédigées dans un souci de clarté et de transparence mais les correcteurs remarquent qu'il y a de plus en plus de candidats dont les copies sont très mal présentées, peu respectueuses du correcteur car sales, raturées, sur lesquelles la numérotation des questions n'est pas respectée et utilisant des abréviations de façon inconsidérée.
Une majorité de correcteurs proposent de revenir à un bonus pour les copies agréables à lire ou à un malus pour les copies sales et peu respectueuses du correcteur.

En conséquence, la lisibilité des copies (soin, orthographe, graphie, numérotation des questions) sera prise en compte à partir de 2026, avec potentiellement un bonus ou un malus en fonction de ce critère.

Sur le fond, les copies sont majoritairement honnêtes mais il reste une assez grosse minorité de candidats adeptes du bluff (notamment en probabilité et dans les calculs fastidieux).
Ces candidats doivent savoir qu'aucun correcteur n'est dupe et qu'un argument inadapté (voire l'absence d'argument) ainsi que le manque de précision lors d'un calcul rendent la réponse irrecevable ! Une bonne réponse est une réponse construite rigoureusement et honnêtement.

Conseil aux futurs candidats : il faut prendre le temps de lire correctement chaque question et d'en comprendre les enjeux avant de se lancer dans une résolution aventureuse menant à une réponse incomplète, voire complètement hors sujet.
Dans la pratique, il ne faut pas rester plus de 4 ou 5 minutes sur une question, sauf pour terminer un long calcul.