Code sujet : 285

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : ESCP BS

MATHÉMATIQUES T

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE TECHNOLOGIQUE

Mercredi 22 avril 2026 de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'épreuve est constituée de trois exercices indépendants. Le mot **FIN** *marque la fin de l'énoncé.*

Exercice 1

On note $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On définit les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Partie I) Spectre et inversibilité de M

On admet que le polynôme R défini par $R(x) = (x^2 - 4)(x - 2)$ est un polynôme annulateur de M.

1. Déterminer les racines du polynôme R.
2. Quelles sont les valeurs propres possibles de M ?
3. Calculer MU et MV.
4. Déduire des questions précédentes le spectre de M.
5. En utilisant le polynôme R, justifier que la matrice M est inversible.

Partie II) Détermination des puissances entières positives de la matrice T

Soit $n \in \mathbb{N}$.

6. Montrer que $T^2 = I_3 + N$.
7. Calculer N^2.
8. À l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer l'expression matricielle de T^{2n}.
9. En déduire que $T^{2n+1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & n \\ 0 & 1 & 1+2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie III) Détermination des puissances entières de la matrice T

10. Justifier que T est inversible et déterminer l'expression matricielle de T^{-1}.
11. Vérifier que $(T^{-1})^2 = I_3 - N$.
12. En adaptant les résultats de la partie II), déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression matricielle de $(T^{-1})^{2n}$ puis de $(T^{-1})^{2n+1}$.
13. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que : $(T^{-1})^k = (T^k)^{-1}$. On notera T^{-k} cette matrice.
14. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, donner l'expression matricielle de T^{2j} et de T^{2j+1}.

Partie IV) Détermination des puissances entières de la matrice M

15. Justifier l'inversibilité de la matrice P.
16. Calculer MP et PT.
17. Déterminer un réel a non nul tel que $M = aPTP^{-1}$.
18. Justifier la relation : $M^{-1} = \dfrac{1}{a}PT^{-1}P^{-1}$.
19. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrer la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie par :

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } M^n = a^n PT^n P^{-1} \quad \text{et} \quad (M^{-1})^n = \frac{1}{a^n} PT^{-n} P^{-1} \text{ ».}$$

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On note, $[\![1\,; n]\!]$, l'ensemble des entiers entre 1 et n. On a donc $[\![1\,; n]\!] = \{1, ..., n\}$.

On souhaite acquérir une collection formée de n cartes différentes. Les cartes sont vendues à l'unité et emballées de sorte qu'on ne puisse pas choisir la carte que l'on achète : on découvre la carte en ouvrant l'emballage. On décide d'acheter au maximum une carte par jour.

Pour tout $j \in [\![1\,; n]\!]$, on définit N_j la variable aléatoire égale au nombre d'achats à faire pour obtenir j cartes différentes de la collection. Ainsi, la variable aléatoire N_n correspond au nombre d'achats à effectuer pour avoir l'intégralité de la collection.

Dans la suite, on dira qu'une carte est nouvelle si elle différente des cartes déjà obtenues.

On note, pour tout $k \in [\![1\,; n]\!]$, X_k la variable aléatoire égale au nombre de cartes à acheter pour passer de la possession de $k-1$ cartes différentes à la possession de k cartes différentes. On suppose que les variables aléatoires de la suite $(X_k)_{k \in [\![1\,;n]\!]}$ sont mutuellement indépendantes.

Par exemple : si la collection est formée de 4 cartes différentes (numérotées 1,2,3,4) et, si au cours des dix premiers jours, on a obtenu, dans cet ordre, les cartes : 2,1,1,2,4,2,4,1,2,3, alors :

— $X_1 = 1$ puisque le premier jour on achète une carte et on ne l'avait pas,

— $X_2 = 1$ puisqu'on fait un achat supplémentaire pour obtenir une nouvelle carte (la numéro 1),

— $X_3 = 3$ puisqu'on fait 3 achats supplémentaires pour obtenir une nouvelle carte (la numéro 4),

— $X_4 = 5$ puisqu'on fait 5 achats supplémentaires pour obtenir une nouvelle carte (la numéro 3).

La collection est alors complète et $N_4 = 10$.

Dans la suite, on pose, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:

$$H_j = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_j = H_j - \ln(j), \quad \text{ainsi que la fonction} \quad f : x \mapsto \ln(1+x) - x.$$

Partie I) Étude préliminaire de la suite $(u_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$

20. Déterminer le domaine de définition, noté D, de la fonction f.
21. Étudier les variations de f sur D.
22. En déduire que : $\forall x \in D, \quad \ln(1+x) \leqslant x$.
23. Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $u_{j+1} - u_j = \dfrac{1}{j+1} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{j+1}\right)$.
24. En déduire, à l'aide de la question 22, la monotonie de la suite $(u_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$.
25. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k} \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.
26. En déduire que la suite $(u_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est positive.
27. Justifier que la suite $(u_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ converge.
28. En déduire l'existence et la valeur de la limite : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)}$.

Partie II) Temps moyen pour obtenir la totalité de la collection

29. Justifier l'égalité : $N_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

    On admettra que cette égalité justifie l'existence de l'espérance de N_n, notée $\mathbb{E}(N_n)$, et que :

$$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k).$$

30. Déterminer la loi de X_1. Donner son espérance et sa variance.

31. Lors du deuxième achat, quelle est la probabilité d'acquérir une carte différente de celle obtenue au premier achat ?
32. Déterminer la loi de X_2. Donner son espérance et sa variance.

Dans les questions 33 et 34, on fixe $k \in [\![3, n]\!]$.

33. On suppose qu'on possède déjà $k-1$ cartes différentes de la collection. Calculer la probabilité d'obtenir une nouvelle carte en fonction de k et n. On note $p_{n,k}$ cette probabilité.
34. Justifier que la variable aléatoire X_k suit une loi géométrique de paramètre $p_{n,k}$.
35. À l'aide des questions 28 et 29, déterminer la limite de $\dfrac{\mathbb{E}(N_n)}{n\ln(n)}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Comment peut-on interpréter ce résultat ?

Partie III) Suivi jour par jour de l'avancée de la collection

Pour suivre l'avancée de sa collection de cartes Pokemon, un enfant décide de mettre à jour, à chaque achat, une base de données. Cette base est constituée de deux tables : la table POKEMON contenant un descriptif de toutes les cartes à collectionner et la table CARTES contenant la liste des cartes Pokemon que l'enfant a achetées. On rappelle que la carte achetée est inconnue jusqu'à l'ouverture de son emballage : le nom d'un Pokemon peut donc apparaitre plusieurs fois dans la table CARTES.

- `POKEMON(Nom, Energie, Evolution, PV)` où
  - `Nom` : Nom du Pokemon (type chaîne de caractères) ;
  - `Energie` : Énergie associée au Pokemon (type chaîne de caractères) ;
  - `Evolution` : Niveau d'évolution du Pokemon (type entier) ;
  - `PV` : Nombre de points de vie du Pokemon (type entier).
- `CARTES(Nom, Date, Lieu)` où
  - `Nom` : Nom du Pokemon (type chaîne de caractères) ;
  - `Date` : Date de l'achat au format (année-mois-jour) AAAA-MM-JJ (type date) ;
  - `Lieu` : Nom du magasin où la carte a été achetée (type chaîne de caractères) ;

36. Quelle clé primaire peut être choisie pour la table `CARTES` ? Justifier votre réponse.
37. Écrire une requête SQL qui renvoie la liste des noms des Pokemon que l'enfant possède sans répétition.
38. Écrire une requête SQL donnant la liste de tous les noms de Pokemon à collectionner dont le nombre de points de vie est supérieur ou égal à 100.
39. Écrire une requête SQL donnant toutes les cartes Pokemon que l'enfant possède dont l'énergie est le feu.

Exercice 3

Cet exercice est constitué de cinq parties. Après avoir traité une représentation graphique dans la partie I, on étudie, dans la partie II, quelques propriétés d'une variable aléatoire X suivant une loi à densité particulière : la loi de Laplace. Les parties III et IV sont consacrées à deux simulations de cette variable aléatoire. Enfin, la partie V est dédiée à l'étude d'une suite de variables aléatoires suivant des lois de Laplace.

Soient $m \in \mathbb{R}, M \in \mathbb{R}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a > 0$ et $b > 0$. On définit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} Me^{-a(x-m)} & \text{si } x \geqslant m \\ Me^{b(x-m)} & \text{si } x < m \end{cases} . \qquad (\star)$$

Partie I) Représentation graphique d'un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on prend $m = 0$, $M = \dfrac{2}{3}$, $a = 1$ et $b = 2$ de sorte que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{2}{3}e^{2x} & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

40. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[-1, 1]$. *On donne* $e^{-1} \approx 0,4$.
41. Compléter les instructions Python suivantes pour obtenir la représentation graphique de f sur $[-1, 1]$. On rappelle que, lorsque la bibliothèque `numpy` est importée avec l'alias `np`, l'instruction `np.e` renvoie la valeur de e^1.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
        if x < 0:
                return  .........
        else:
                return  .........

A = np.linspace(-1,1,1000) #Intervalle en abscisse
B = np.zeros(1000)       #Valeurs en ordonnee
for k in range(1000):
        B[k]=f(.....)

plt.plot(A,B)
```

Partie II) Étude d'une variable aléatoire X et de son opposé $-X$

On travaille avec la fonction f définie en $(\star)$.

42. Déterminer la valeur de la constante M en fonction de a, b et m pour que la fonction f, définie en $(\star)$, puisse être considérée comme une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Pour cette valeur de M, on note X une variable aléatoire à densité, dont la fonction f est une densité de probabilité. On dit alors que X suit une loi de Laplace asymétrique associée aux paramètres m, a et b et on note $X \hookrightarrow \mathcal{L}(m, a, b)$. On note F_X sa fonction de répartition.

43. Justifier rigoureusement les expressions suivantes :
    (a) $F_X(x) = \dfrac{a}{a+b} e^{b(x-m)}$ si $x < m$,
    (b) $F_X(x) = 1 - \dfrac{b}{a+b} e^{-a(x-m)}$ si $x \geqslant m$.
44. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $-X$. *Distinguer les intervalles* $]-\infty, -m]$ *et* $]-m, +\infty[$.
45. En déduire que la variable aléatoire $-X$ suit aussi une loi de Laplace asymétrique et déterminer les paramètres associés en fonction de m, a et b.

Partie III) Une première méthode pour simuler X à l'aide de Python

Dans cette partie, on se place **dans le cas particulier où** $a = b$, c'est-à-dire que $X \hookrightarrow \mathcal{L}(m, a, a)$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. On définit la variable aléatoire Y par $Y = |X - m|$. On note F_Y sa fonction de répartition.

46. Déterminer la valeur de $F_Y(y)$ lorsque $y < 0$.
47. Montrer que : $F_Y(y) = F_X(y + m) - F_X(-y + m)$ lorsque $y \geqslant 0$.
48. Reconnaitre la loi de Y.
49. Déterminer la valeur de $\mathbb{P}(X > m)$.
50. On exécute sur Python le programme suivant :

```
import numpy
import numpy.random as rd

def Simu1_X(m,a):
```

```
        Y = rd.exponential(a)
        if rd.random() > 1/2:
                X = Y+m
        else:
                X = -Y+m
        return X

Mystere = np.zeros(1000)
for k in range(1000):
        Mystere[k]=Simu1_X(2,1)

print(np.sum(Mystere)/1000)
```

La console affiche `2.023956828868501`. Interpréter ce résultat en justifiant votre réponse.

Partie IV) Une seconde méthode pour simuler X à l'aide de Python

Dans cette partie, on se place dans le cas général où $X \hookrightarrow \mathcal{L}(m, a, b)$ avec $m \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et $b > 0$.

51. Justifier que la fonction F_X réalise une bijection de $]-\infty, m[$ dans $\left]0, \dfrac{a}{a+b}\right[$.
    On note F_1 l'application réciproque associée.
52. Montrer que, pour tout $y \in \left]0, \dfrac{a}{a+b}\right[$, $F_1(y) = m + \dfrac{1}{b} \ln\left(\dfrac{a+b}{a} y\right)$.

De façon analogue, on admet que la fonction F_X réalise une bijection de $[m, +\infty[$ dans $\left[\dfrac{a}{a+b}, 1\right[$.

On note F_2 l'application réciproque associée de sorte que, pour tout $y \in \left[\dfrac{a}{a+b}, 1\right[$:

$$F_2(y) = m - \frac{1}{a} \ln\left(\frac{a+b}{b}(1-y)\right).$$

Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $]0, 1[$. On définit la variable aléatoire T de la manière suivante :

$$T = \begin{cases} F_1(U) & \text{si } U < \dfrac{a}{a+b} \\ F_2(U) & \text{si } U \geqslant \dfrac{a}{a+b} \end{cases}.$$

On note F_T la fonction de répartition de T.

53. Rappeler l'expression de la fonction de répartition F_U de la variable aléatoire U.
54. Montrer que, si $t < m$ alors : $\mathbb{P}(T \leqslant t) = \mathbb{P}(U \leqslant F_X(t))$.
    De la même manière, on admet que, si $t \geqslant m$ alors : $\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(U > F_X(t))$.
55. Déduire des questions précédentes que $F_T = F_X$.
56. On rappelle que la commande `numpy.log` de la bibliothèque `numpy` donne accès à la fonction ln. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire X :

```
import numpy
import numpy.random as rd

def Simu2_X(m,a,b):
        U=rd.random()
        if .......... :
                X = .........
        else:
                X= .........
        return X
```

Partie V) Étude d'une suite de variables aléatoires suivant des lois de Laplace

On s'intéresse maintenant à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{L}(0, 2^n, 2^n)$. Une densité de probabilité de la variable aléatoire X_n est donc :

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{2}e^{-2^n x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{2}e^{2^n x} & \text{si } x < 0 \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $\overline{X_n} = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{n}$.

On admet dans la suite les résultats suivants :

(R1) Si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes admettant une variance, alors la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$ admet une variance et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* , \quad \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(Y_k).$$

(R2) Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

- si h est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = 0$,
- si h est une fonction paire sur $\mathbb{R}$, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$.

57. Un résultat intermédiaire :
Soient $\lambda > 0$ et S une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. En utilisant la variable aléatoire S, justifier que :

$$\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda^3}.$$

Dans les questions 58 à 60, n est un entier naturel non nul.

58. En appliquant (R2) à la fonction $x \mapsto xf_n(x)$, justifier l'existence de l'espérance de X_n et donner sa valeur.
59. En appliquant (R2) à une fonction adéquate, justifier l'existence de la variance de X_n et calculer sa valeur.
60. En déduire, si elles existent, la valeur de l'espérance et de la variance de $\overline{X_n}$.
61. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n}\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0.$$

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 26 1217 – D'après documents fournis